В.М. Тихомиров

ЛЕОНИД РОМАНОВИЧ ВОЛЕВИЧ (СУДЬБА И ЖИЗНЬ)

1 сентября 1943 года был наш первый день в новой школе. Школа располагалась в самом центре Москвы. Это была известная московская школа № 170. Кто только не учился там! Актер Андрей Миронов, художник Борис Мессерер, писательница Людмила Петрушевская, композитор Геннадий Гладков и еще, и еще...

Начался первый урок. Учительница Вера Михайловна знакомится с нами. Она спрашивает и записывает наши "анкетные данные". Вызывает по алфавиту. Вот поднялся мальчик, сидевший от меня далеко, у окна. Ничто особенно мальчика не выделяло — мы все были стрижены наголо, ходили в чем попало. Вопросы были обычные — как зовут родителей, чем они занимаются, адрес, телефон. Мальчик назвал свой телефон. Меня страшно смутило то, что он назвал мой собственный номер телефона — К 3-13-35, но ведь он не жил в нашей квартире!? На переменке я подошел к нему разобраться. Выяснилось, что его телефон на одну цифру, но все-таки отличается: К 3-12-35. А зовут его Леня Волевич. Вот так все и началось. Мы жили рядом (я тоже жил на Пушкинской, в угловом доме с проездом Художественного театра) и постоянно бывали друг у друга.

А в понедельник 21 апреля 2007 года, спустя без малого шестьдесят четыре года, я зашел к Волевичам домой (Леня в пятницу вернулся из больницы, где ему делали операцию). В разговоре, среди прочего, я сказал Лёне тогда:"В этом году мы не встретимся с тобой в Крыму — у меня другие планы, а тебе надо как следует поправиться. А на будущий год давай опять махнем осенью в Ласпи!" Я верил, что так оно и будет. Леня пожал плечами и ничего не ответил. Поговорили еще, я стал собираться, пообещав зайти снова в пятницу 26 апреля после семинара. А когда я позвонил после семинара, Ира сказала, что все кончено.

... Никогда не мог вообразить, что мне придется стоять у гроба моего дорогого друга, друга всей моей жизни.

Жизнь любого из нас складывается, как дом, из отдельных блоков: детство, отрочество, юность и взрослая жизнь, которая состоит из личной жизни, творчества, службы, иногда чего-то еще. А за последней чертой остаются лишь воспоминания.

Леня родился 11 июля 1934 года в Москве и провел детство в доме на углу Пушкинской улицы и Пушкинской площади. У большинства из нас "отчего дома" не существовало, было родительское пристанище. Для каких целей был построен этот дом на углу Большой Дмитровки и Страстного бульвара (так назывались Пушкинакая улица и Пушкинская площадь в в старые времена), затрудняюсь сказать. Возможно, это была гостиница. Огромный коридор, справа и слева комнаты, некоторые совсем маленькие, иные побольше. В каждой комнате семья, всего, наверное, семь, может быть, восемь семей. Туалет один, ванная одна (без горячей воды и без газовой колонки). У выхода маленькая кухонька с окнами и черным ходом во двор. (Окна комнаты Волевичей также выходили во двор-колодец, образованный четырьмя стенами домов, так что солнце никогда в окна не светило). У парадной двери справа надписи — кому сколько звонков, а слева медная табличка: *Р. В. Волевич. Нервные болезни.*

Какие силы соединили вместе две жизни — отца и матери — Романа Владимировича и Ирмы Владимировны, в ту пору, когда буря срывала всех с насиженных мест, сокрушала вековые устои и швыряла то туда, то сюда? Как вышло, что они оказались в доме на Пушкинской? Сейчас, наверное, об этом никто уже не расскажет. Когда на свет появился их сын, Роману Владимировичу было тридцать шесть, Ирме Владимировне двадцать пять лет. Это были разные люди, но они одарили сына счастьем родительской любви, и сын заплатил им за это светлой и трогательной сыновней любовью.

Роман Владимирович Волевич родился в Царстве Польском, учился в варшавской гимназии (при поступлении преодолев "процентную норму"). Обладал замечательной памятью, при случае цитировал длинные латинские монологи. Роман Владимирович был крупным врачом-невропатологом, во время войны носил полковничьи погоны. Ирма Владимировна до войны закончила Литературный институт, была в аспирантуре и после войны защитила диссертацию по "Волшебной горе" Томаса Манна, затем преподавала зарубежную литературу и занималась переводами. Родительское воздействие на сына было велико.

Супруги имели совсем разные характеры — Роман Владимирович был человеком в себе, Ирма Владимировна была личностью открытой и общительной, имевшей множество друзей и подруг, притягивавшей в свой дом молодежь. Сын ценил обоих и гордился ими.

В начале войны мать с сыном оказались в эвакуации, в Омске. Это была пора ее аспирантуры. Она готовилась к аспирантским экзаменам. Отводя ранним утром сына в детский садик, она пересказывала ему мировую литературу. Особенно запомнились Лёне творения средневекового эпоса — "Песнь о Роланде" и "Песнь о Нибелунгах". Мамины рассказы сохранились в живой памяти мальчика, однако, все это имело и комическую оборотную сторону: Лёне неинтересно было самому читать детские книжки, и он в школе некоторое время отставал по чтению! Чтобы преодолеть это, он прочитал вслух от начала до конца всю книжку Дюма про трех мушкетеров!

Леня поступил в школу в Омске осенью 1942 года, а летом 1943 года Ирма Владимировна с сыном возвратилась в Москву. Мать отдала его в ближайшую к дому сто семидесятую мужскую школу.

В военные годы в центре Москвы, во дворах, примыкавших к школе № 170 было много мальчишек, росших без семейного надзора, грубых, не желавших учиться, хулиганистых. На них не было никакой управы, и обстановка в школе была неприятной. Меня перевели в более благополучную сто тридцать пятую школу. Через год лёнины родители перевели туда и своего сына. Там мы доучились до конца, сохранив теплые воспоминания о 135-й школе, о нашем классе и наших учителях. Там Лёня приобрел себе нескольких друзей на всю жизнь. Самым близким другом Лёни стал Костя Гофман, впоследствии известный экономист, редкостный умница и замечательный товарищ.

В школе преподавали учителя разных поколений. Учитель истории Аркадий Николаевич Ильинский и преподававшая литературу Татьяна Григорьевна Юркевич принадлежали к почти уничтоженному уже слою людей, который назывался русской интеллигенцией. Татьяна Григорьевна была дочерью писателя Григория Мачтета, который, разделяя идеалы своего времени, организовал коммуну, где жизнь строилась по принципам добра и справедливости. Умирая, он завещал своим детям трудиться и любить людей. Муж Татьяны Григорьевны был в детстве близок семейству Цветаевых.

Влияние Аркадия Николаевича и Татьяны Григорьевны на Лёню было велико — они отметили и развивали его гуманитарные интересы. Среди учителей военного поколения было трое мужчин Борис Львович Вульфсон, преподававший

Конституцию, физик Георгий Семенович Дудников и Григорий Яковлевич Дорф, учивший нас английскому языку. Леня сохранял долгую дружескую связь с ними.

Трагические события тридцатых и сороковых годов едва коснулись семейства Волевичей. Никто из близких не сгинул в пору лихолетья, никто не пострадал на войне. В период космополитизма Роман Владимирович сохранил работу и не был вышвырнут из армии. С Ирмой Владимировной было хуже. Ее диссертация, с блеском защищенная, была опорочена, а ее саму обвинили в космополитизме. Ирма Владимировна не смогла найти работу в Москве и вынуждена была надолго уезжать в Орел, где работа нашлась. Тогда она изучила голландский язык (принадлежавший к числу редких языков), чтобы иметь возможность трудиться над переводами с голландского и не покидать Москвы. А в отсутствие Ирмы Владимировны хозяйство вела домработница Васёна, очень любившая Лёню.

Ирма Владимировна нашла нам с Лёней учительницу английского языка. Ею стала Наталия Александровна Кроль, выпускница Института иностранных языков. Она жила действительно в отчем доме, в отдельной квартире. Мы занимались с ней около двух лет. Наталия Александровна вышла замуж, но первые роды ее были неудачны, и она не смогла продолжать занятия с нами. Прошло без малого шестьдесят лет, и вдруг Леня узнает, что Н. А. Бонк, автор многих широко известных учебников по английскому языку, организатор знаменитых курсов изучения языка — это не кто иная, как наша Наталия Александровна Кроль. Мы связались с ней и навестили свою учительницу, которая так и осталась жить в доме, в котором ей суждено было родиться. Встреча была очень теплой: оказывается, учительница не забыла нас. Уроки Наталии Александровны были не напрасны. Леня потом много работал над своим английским, много читал и оказался вполне подготовленным к новым реалиям, когда стало возможно ездить в самые разные края. Он был из тех немногих, кто мог вести синхронный перевод математических докладов.

Трудная тема — выбор профессии. Вот строки замечательного американского поэта Роберта Фроста:

I shall be telling this with a sigh
Somewhere ages and ages hence:
Two roads diverges in a wood, and I —
I took the one less travelled by,
And that has made all the difference.

(Ну что ж, остается лишь только вздохнуть О том, что со мною случилось: В лесу из двух троп, куда можно свернуть, я выбрал одну, чтоб продолжить свой путь, И тем все предопределилось.)

В наши green years — зеленые годы — юноша, стоявший перед выбором своего пути, мог видеть три жизненные тропы — научную, гуманитарную и техническую. Лёню техника не интересовала. Оставались две тропы, как у Фроста. Если мы жили бы в свободной стране, я не уверен, что Леня выбрал бы науку — он был очень гуманитарным человеком. Проявить свои математические способности у него возможностей не было: у нас фактически отсутствовал школьный учитель математики, а кружок в МГУ мы с Лёней выбрали неудачный. Но несмотря на все это, Леня решил поступать на мех-мат. День открытых дверей на мех-мате окончательно укрепил его в этом намерении. Председатель собрания сказал, в частности, что вот здесь за столом президиума сидит Андрей Николаевич Колмогоров. Его имя известно каждому математику на нашей Земле и можно высказать уверенность в том, что если есть математики на других планетах, они тоже должны знать его имя.

Как-то во время какого-то застолья одна девушка сказала, что Лёнечка (как Лёню звали друзья) поразил ее во время собеседования тем, что хладнокровно читал газету (в то время, как все остальные психовали).

СОБЕСЕДОВАНИЕ и ГАЗЕТА! Это не укладывалось в голове! Лёню спросили, как было дело. Он усмехнулся:

“Так эта газета меня и спасла” ...

Надо начать с небольшого комментария. В начале пятидесятых годов евреев, за редчайшими исключениями, в Университет не принимали. На нашем курсе (на мех-мате) – мы поступали в 1952-м – было всего шестеро тех, у кого в паспорте в графе национальность было написано слово “еврей”. На триста семьдесят пять человек, которые были приняты. У четверых были свои *причины,* свои опоры. У двоих никаких опор не было. Одним из этих двоих был Лёня.

Как решалась эта проблема – не брать евреев? Надо сказать, просто. Очень просто.

... За несколько лет до нашего поступления ввели медали. Золотая медаль давала привилегию: освобождение от экзаменов. Нужно было только пройти *собеседование.* На собеседовании не требовалось никого заваливать. Для проведения собеседования никого специально не отбирали, никого не инструктировали: приглашали всех профессоров и преподавателей в порядке общей очереди. Все свершалось до смешного тривиально: протокол, на котором было написано рукою сколь угодно приличного человека “на все вопросы были даны правильные ответы” передавался отборочной комиссии. И та решала – брать или не брать. И, если *нет*, то просто писалось: “Отказать.”

И все!

Мы часто в то лето бродили с Лёней по Москве, готовились к школьным экзаменам и обсуждали жизненные проблемы. В частности – куда поступать. Леня твердо знал, что на мех-мат ему не попасть. Но он знал также, что не сможет простить себе, если не предпримет попытки попасть туда, куда он мечтал.

Его вызвали на собеседование, если мне не изменяет память, четвертого июля.

Такого чудовищного нервного напряжения он не испытывал никогда. Ни до, ни после. Он почувствовал, что ему становится дурно. И решил спуститься вниз, в киоск. Купить газету.

Спустился. Купил. Все это заняло не больше пяти минут. Уселся на подоконник. И стал якобы читать, стараясь унять нервную дрожь. Но тщетно. Все виделось ему в какой-то полутьме, ни на что не хватало сил реагировать.

Тянулись часы. Его не вызывали. Вот уже не осталось почти никого. И тут до его сознания стало вдруг доходить: что-то произошло, его почему-то забыли. И когда в очередной раз из двери выглянула секретарша, чтобы вызвать последнего, он спросил ее: “А как же я ?”

Она удивилась: “А как Ваша фамилия?” Он назвал. “Но я же Вас вызывала... Где же Вы были?” У Лёни все оборвалось внутри и срывающимся голосом он произнес: “Я покупал газету... А так я все время был здесь...”

Она задумалась. “Прямо не знаю, что же делать...”

Но я рассказываю сказку со счастливым концом. И в моей сказке, как и полагается, произошло Чудо. Вдруг откуда ни возьмись появился *добрый волшебник.*

Именно в то самое мгновенье, когда, казалось, что все рухнуло, к двери семьдесят шестой аудитории подходил Великий Тополог, член-корреспондент Академии Наук СССР аж с 1929 года (академиком он станет в будущем, 1953 году) – сам Павел

Сергеевич Александров. Он, видно, не слишком торопился принять участие в *собеседовании,* но все-таки пришел.

И девушка – импульсивно, не спросив ни у кого совета, – обратилась к нему: “Павел Сергеевич, вот тут абитуриент один остался, Вы не приняли бы у него собеседование?” “Отчего же не принять, извольте. *А с кем пгикажете?*” (он сильно грассировал). Экзаменовать полагалось двоим. А Павел Сергеевич, “Пусик” , как все его называли, безумно любил всякие церемонии в духе XIX века: “с кем прикажете” адресовалось девушке лет двадцати пяти, и это привело ее в полнейшее замешательство. Пока она смущенно молчала, не зная, что “приказать” , к Павлу Сергеевичу подошел поздороваться его коллега по кафедре. И П.С. тут же спросил: “А не образовать ли нам с Вами ПА-АГУ, глубокоуважаемый Сергей Владимирович?” (Павел Сергеевич любил поиздеваться над разными языковыми новациями, в частности, над словом “пара” .) Сергей Владимирович почел за благо не возражать, и собеседование началось.

Каждый из экзаменаторов задал по одному несложному вопросу, и Леня на них ответил. И тогда Александров задал свой “коронный” вопрос, он очень любил его, впоследствии не раз я слышал этот вопрос из уст Павла Сергеевича (по-видимому, с этим вопросом было связано какое-то личное воспоминание,): “Можно ли провести прямую в пространстве, пересекающую три скрещивающиеся прямые?” И Леня снова ответил!

Пусик пришел в полнейшее восхищение, что он не преминул бурно выразить. И добавил:“Я вполне удовлетворен, а Вы, дорогой Сергей Владимирович?” Тот молча кивнул. На том все и кончилось.

Года через три нашему курсу поручили разбирать мех-матские архивы. В этом историческом мероприятии принял участие и я. Мне выпала высокая честь выбрасывать в помойку протоколы собеседований лета 1952 года, *нашего* года. Именно тогда я осознал величие замысла с собеседованием: многократно мне попадались протоколы, где абитуриент отвечал правильно на все вопросы, после чего, без комментариев, следовало: “Отказать”.

Я искал свой протокол, но тщетно.

И вдруг я увидел протокол лёнькиного собеседования! На нем рукою Павла Сергеевича красивейшим гимназическим почерком было начертано: “на все вопросы были даны весьма удовлетворительные ответы”. И стояла его царственная подпись “П. Александров” с огромной шляпой над двумя палками, что означало букву П (я знал его подпись: точно такая стояла в моей зачетке после экзамена по аналитической геометрии). А ниже значилось “принять без предоставления общежития”.

Итак, Лёню приняли. Чудо совершилось!

Когда Леня Волевич стал студентом мех-мата, на нашем факультете было восемь математических кафедр: высшей геометрии и топологии (заведующий кафедрой П. С. Александров), теории чисел (А. О. Гельфонд), дифференциальной геометрии (В. Ф. Каган), теории вероятностей (А. Н. Колмогоров), алгебры (А. Г. Курош), теории функций и функционального анализа (Д. Е. Меньшов), дифференциальных уравнений (В. В. Степанов), математического анализа (А. Я. Хинчин) и истории математики (С. А. Яновская). Среди профессоров, работавших в те годы на мех-мате были такие замечательные ученые, как Нина Карловна Бари, Израиль Моисеевич Гельфанд, Михаил Алексеевич Лаврентьев, Лазарь Аронович Люстерник, Иван Георгиевич Петровский, Лев Семенович Понтрягин, Петр

Константинович Рашевский, Сергей Львович Соболев, Сергей Павлович Фиников и другие. Трудно усомниться в том, что ни в одном университете мира не было такой концентрации столь крупных математиков.

Как такое могло случиться?

В тридцатые годы социальные условия в СССР, всюду, кроме основных центров, были тяжкими, и это привело к невиданной концентрации творческой интеллигенции в нескольких больших городах, особенно в Москве. Все названные мною ученые (и вообще, крупнейшие деятели науки, культуры и инженерии) жили фактически в пределах Садового кольца, радиус которого равен пяти примерно километрам. В пределах этого "радиуса" жила значительная доля интеллектуальной элиты всей страны. Сопоставимая по численности с остальной ее частью.

А нам, студентам мех-мата, в пятидесятые годы выпало счастье учиться на таком поразительном факультете. Какие в то время были на мех-мате научные семинары!

Топологический кружок П. С. Александрова, ведший свою историю от той поры, когда П. С. Александров и П. С. Урысон создавали свою топологическую школу, семинар по теории функций Н. К. Бари и Д. Ф. Меньшова, родоначальником которого был сам Н. Н. Лузин, семинар по теории вероятностей А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина, семинары В. В. Немыцкого и В. В. Степанова по обыкновенным уравнениям и И. Г. Петровского, С. Л. Соболева и А. Н. Тихонова по уравнениям с частными производными, семинар А. Г. Куроша по алгебре, М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата по комплексному анализу, семинар С. А. Яновской и А. П. Юшкевича по истории математики, наконец, быть может, самый замечательный семинар И. М. Гельфанда по всей математике — всё это семинары воистину всемирного значения. На протяжении нескольких лет лучшие студенты оставлялись в Университете, и все начинали вести семинары. Число семинаров исчислялось десятками и иногда приближалось к сотне.

А сколько было тогда спецкурсов и каких! Некоторые студенты умудрялись сдавать их около десятка, а рекорд, кажется, был установлен Михаилом Михайловичем Постниковым, который сдал четырнадцать спецкурсов!

Это были годы смены научных приоритетов, когда вдруг начала проявляться тяга к математической физике. Среди тех, кто активно работал в области теории динамических систем и математической физики, назову Диму Аносова, Диму Арнольда, Алика Березина, Юлика Добрушина, Сашу Кириллова, Боба Минлоса, Сережу Новикова, Яшу Синая, Алика Шварца (я назвал выше Дмитрия Викторовича Аносова, Владимира Игоревича Арнольда, Феликса Александровича Березина, Ролланда Львовича Добрушина, Александра Александровича Кириллова, Роберта Адольфовича Минлоса, Сергея Петровича Новикова, Якова Григорьевича Синая, Альберта Соломоновича Шварца так, как их все звали в пору их студенческих и аспирантских лет). Это был плодотворный и вдохновляющий период в истории отечественной математики.

У нас был замечательный курс. Лёню очень любили на курсе. И он нашел на нем многих друзей. И снова я хочу назвать одного друга на всю жизнь — Юлиана Борисовича Радвогина.

Пропускаю многие эпизоды нашего студенчества: туристские походы — в те годы мы ходили вместе по Подмосковью, на северный Урал, по Западной Украине, на байдарках по рекам и озерам близко и далеко от Москвы. Устраивались интересные литературные вечера, где Леня замечательно рассказывал о писателях и поэтах.

И еще одно незабываемое было связано с домом Волевичей — это блины. На масленицу друзья созывались к Волевичам, где можно было испробовать нечто совершенно замечательное. Не раз доводилось мне наслаждаться изысканнейшими, волшебными по вкусу блюдами, изготавливаемыми бабушками моих друзей, но самые счастливые гурманские воспоминания я храню от творений лёниной бабушки Марии Иосифовны. Она приготовляла тесто для блинов, которые пекла Васёна, и украшала стол разнообразными вкуснейшими салатами, фаршированными помидорами, кабачками и, конечно рыбой-фиш, что могли делать с таким искусством только еврейские бабушки. И вообще Мария Иосифовна была необычайно мягким, доброжелательным и теплым человеком.

Но главным, конечно, в жизни Лени в студенческую пору была учеба. Леня учился на отлично — у него, кажется, четверка была только по военному делу. Леня рано стал думать над математическими проблемами. В 1952 году начал вести семинар для первокурсников Евгений Борисович Дынкин, и Леня стал в нем участвовать. Курсовые за второй (тогда были такие) и за третий курс писались под руководством Евгения Борисовича. На четвертом курсе Лёня принял участие в работе семинара Ольги Арсеньевны Олейник по уравнениям в частных производных. Это и определило его дальнейшую научную судьбу. Дипломная работа, выполненная под руководством Олейник, стала основой для его первой публикации. Ольга Арсеньевна выдвинула Волевича в аспирантуру мех-мата, но это осуществить не удалось.

Причина этого интересна, а рассказать о ней могу только я. Когда мы учились на третьем курсе, как-то сама собой вдруг родилась стенная газета, получившая название “Литературный бюллетень”. В ней принимали активное участие три человека, ставших известными диссидентами и пострадавших за свою деятельность. Это Миша Белецкий, Кронид Любарский и Дима Янков. Кронид и Дима прошли через лагеря и ссылки, Миша был исключен из Университета. В редакцию бюллетеня входил и Леня Волевич. Первые номера не вызвали нареканий, а осенний номер 1956 года был объявлен антисоветским, и над несколькими членами редакции нависла угроза исключения. Леня мне рассказывал со слов какого-то своего знакомого, что планировался арест некоторых членов редакции Литературного бюллетеня, но это не было осуществлено по-видимому из-за действий Ивана Георгиевича Петровского. Участие в Литературном бюллетене и послужило одной из причин того, что Леня не попал в аспирантуру мех-мата.

Волевич получил распределение в ОПМ (Отделение прикладной математики), впоследствии это отделение превратилось в Институт прикладной математики Академии наук, ныне он носит имя М. В. Келдыша. В этом институте Л. Р. работал до последнего дня своей жизни.

Там Леонид Романович нашел еще одного большого друга — им стала Никита Дмитриевна Введенская. Лёня оставался верным и преданным другом Никиты до последнего дня. Они постоянно перезванивались, чуть ли не ежедневно. Их последний разговор состоялся за два дня до 26 апреля.

В 1957 году Волевич поступает в аспирантуру к Константину Ивановичу Бабенко, и с той поры начинается его общение с этим замечательным математиком и вычислителем. Константин Иванович оказал на Волевича очень большое влияние. Леонид Романович один и с соавторами (А. И. Аптекаревым, Н. Д. Введенской, А. В. Юдиным и другими) выполнил несколько вычислительных работ. Но в выборе тематики для собственных исследований Л. Р. проявлял всегда большую самостоятельность. В 1960 году Волевич защищает кандидатскую диссертацию на тему "Локальные свойства решений систем дифференциальных уравнений в частных производных".

После защиты Леонид Романович остается работать в отделе К. И. Бабенко. В этом отделе была удивительно дружеская и творческая обстановка. Наиболее близкими с Леонидом Романовичем оказались и навсегда остались Юлиан Борисович Радвогин и Эдуард Погосович Казанджан. Леонид Романович и Юлиан Борисович просидели в одной комнате свыше сорока лет. Как-то они вместе оказались где-то на юге, то ли в доме отдыха, то ли в альплагере. Они постоянно были вместе и все время общались. Кто-то заподозрил, что они давно не виделись, и был потрясен тем, что их постоянное ежедневное общение продолжается четыре десятилетия. И не наговорились!

Тогда же, с начала шестидесятых годов, Леонид Романович становится активным участником семинара Марка Иосифовича Вишика. Марк Иосифович не раз говорил и мне и в моем присутствии, что первый доклад на его семинаре был сделан Леонидом Романовичем Волевичем. Год тому назад Леонид Романович докладывал на вишиковском семинаре и о своем последнем цикле работ. На семинарах Вишика Леонид Романович обрел еще одного близкого друга и коллегу — Михаила Семеновича Аграновича.

В 1971 году Л. Р. защищает докторскую диссертацию "Исследования по неоднородным псевдодифференциальным операторам (вопросы регулярности решений, задача Коши)". Оппонентами по диссертации были О. А. Ладыженская, В. П. Маслов и Г. Е. Шилов. Со всеми оппонентами у Л. Р. были плодотворные научные контакты. После 1969 года началась новая волна антисемитизма, но снова она обошла Лёню стороной: он был в некотором роде последним, у кого защита прошла успешно. У Лени тоже были моменты тяжелых переживаний, но об этом не хочется сейчас вспоминать.

В 1966 году Леонид Романович соединил свою жизнь с Ириной Яковлевной, которую все участники Крымских осенних школ хорошо знают. Общаясь с Лёней в домашней обстановке, я наслаждался зрелищем мужа, гордящегося своей женой. В этом отношении мне не с кем его сравнить. Леня показывал полку с переводами жены, с воодушевлением рассказывал о ее успехах и наградах, всегда подчеркивая ее сильные стороны. У Волевичей родилось двое сыновей — Владимир и Михаил. Я говорил, что Леня был замечателным сыном и мужем. Став мужем Ирины, он стал еще и замечательным зятем, лучшим среди всех, кого я когда-либо воспринимал в этой "должности". Это — особый и очень красивый сюжет, но, наверное, для другого случая.

На грани пятидесятых-шестидесятых годов Роман Владимирович, Ирма Владимировна и Леня съезжают с Пушкинской, получив по обмену небольшую отдельную квартиру в Черемушках. Потом Леонид Романович уже со своей семьей покидает родителей и получает отдельную квартиру на улице Удальцова. А еще через некоторое время семейство Волевичей переезжает в дом на углу Ленинского проспекта и улицы 26 Бакинских комиссаров. Этот дом стал его последней обителью. Как-то он сказал: "Мы с Вовкой родились на одной улице, на одной и умрем."

Настало время сказать о творчестве Леонида Романовича Волевича. Если попытаться охарактеризовать его в целом, то надо сказать, что оно целиком посвящено одному, но очень многостороннему направлению в математике, а именно общей теории уравнений в частных производных.

Теория уравнений с частными производными формировалось фактически у нас, благодаря выдающемуся вкладу И. Г. Петровского и С. Л. Соболева. Они, разумеется, имели великих предшественников, таких, как Даламбер, Эйлер, Гаусс, Риман, Пуанкаре, Адамар, но их не называли специалистами по уравнениям с частными производными, они занимались математической физикой. Начало же общей теории заложили Петровский и Соболев у нас, Лере, Гординг, Шаудер и другие “у них”, и все это по сути произошло также в середине тридцатых годов.

В сороковые-пятидесятые годы начинают свою творческую жизнь М. И. Вишик, А. Дуглис, Дж. Дж.Кон, О. А. Ладыженская, Б. Мальгранж, Л. Ниренберг, О. А. Олейник, Л. Хермандер, Г. Е. Шилов и другие. Им на смену приходят их ученики нашего с Леонидом Романовичем поколения (в шестидесятые годы самое активное участие в построении общей теории дифференциальных уравнений принимали в Москве ученики Вишика, Олейник и Шилова (М. С. Агранович, В. М. Борок, С. Г. Гиндикин, Ю. В. Егоров, Я. И. Житомирский, В. П. Паламодов, Г. И. Эскин и другие) . А далее единый мощный поток начинает дробиться на множество разрозненных ручьев и единая некогда наука перестает существовать.

Леонид Романович Волевич был одним из патриархов общей теории уравнений с частными производными. Его творчество посвящено осознанию и дальнейшему развитию работ основоположников общей теории. Он был одним из продолжателей творчества классиков общей теории уравнений с частными производными. И когда возникала задача доверить кому-либо обзор всей теории, неизменно возникала фамилия Волевича и больше никого.

Я расскажу о нескольких эпизодах его творческой жизни, живым свидетелем которых мне довелось быть. Сначала приведу три пункта сухого математического текста о трех направлениях деятельности Л. Р. на раннем этапе его творчества, когда его занимали такие темы:

1. *Главные части систем уравнений в частных производных.* Система уравнений определяется матрицей $A_{jk}(x,D)$. Как выделить “главные элементы”, которые определяют свойства всей системы в целом, подчиняя себе остальные. Лере предложил способ выделения главной части общей гиперболической системы, при котором порядки элементов матрицы $A_{jk}(x,D)$ представлялись суммами $s_j + t_k$; затем Дуглис и Ниренберг определили аналогичным образом главную часть эллиптической системы. Однако алгоритм нахождения чисел s_j и t_k отсутствовал. Л. Р. выделил естественный класс систем, названный им невырожденными, содержащий системы, рассмотренными как Лере, так и Дуглисом – Ниренбергом. Для невырожденных систем было доказано существование нужных чисел s_j и t_k. Сначала они определялись довольно сложным комбинаторным алгоритмом, затем был предложен простой алгоритм, основанный на линейном программировании.

2. *Теория общих краевых задач для систем, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу.* Она была построена в L_2. Волевич (и одновременно с ним Солонников, Хермандер и Агмон – Дуглис – Ниренберг) перенесли результаты Дуглиса – Ниренберга на пространство L_p. Простота изложения в работе [9], основанного на теореме Михлина о мультипликаторах в L_p, сделала ее востребованной.

3. *Неоднородные гипоэллиптические псевдодифференциальные операторы и теория функциональных пространств.* В 1965 году появилась статья в УМН Волевича и Панеяха, в которой излагалась теория весьма общих функциональных пространств на языке теории обобщенных функций и преобразований Фурье. В этой статье были введены пространства H^{μ}, определяемые тем, что $\mu(D) \in L_2$.

Эти три пункта я привел почти дословно из юбилейной статьи в УМН, посвященной семидесятилетию Л. Р. Волевича. Юбиляр сам принимал активное участие в написании этой статьи, подводя итоги сорока пяти лет своей творческой деятельности. Он разбил свою творческую жизнь на десять периодов. В описанных выше трех первых направлениях я принимал некоторое участие, и мне приятно вспомнить здесь об этом.

Размышляя над первой группой вопросов, Леонид Романович сформулировал такую задачу, с которой ознакомил меня: *пусть дана числовая матрица* $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, *обладающая тем свойством, что суммы* $\sum_j a_{ji_j}$, *где* $P(j) = i_j$ *по всем подстановкам* P *одинаковы. Доказать, что найдутся* $2n$ *чисел* $(s_i)_{i=1}^n$ *и* $(t_j)_{j=1}^n$, *что* $a_{ij} = s_i + t_j$. Леня доказал это для $n = 2$ и $n = 3$ и как-то поверил в этот результат. Я доказал общий результат довольно сложной индукцией, Леня тоже доказал это и тоже громоздко. Статья пошла в “ДАН”, и ее стал редактировать Феликс Владимирович Широков, один из лучших редакторов своего времени. Он сказал Лёне, что видел такие $(s_i)_{i=1}^n$ и $(t_j)_{j=1}^n$ в работах по линейному программированию. И действительно, искомая теорема оказалась тривиальнешим следствием теоремы двойственности для транспортной задачи.

Так появилась вторая работа на эту тему, написанная для УМН, Л. Р. показал, что числа $(s_i)_{i=1}^n$ и $(t_j)_{j=1}^n$ — это не что иное, как двойственные переменные некоей естественно возникающей транспортной задачи линейного программирования.

Прошло какое-то время. Приехал Лере. Я пошел посмотреть на него в аудиторию 14-08, где тот делал свой доклад. Мы сидели рядом с Лёней. Я не очень внимательно слушал — все это было от меня далеко. И вдруг до меня доносится: “... Волеви́ч ...”. Оказывается, Лере прочитал и осознал результат Волевича! Невырожденные системы, введенные Л. Р., стали называть системами Лере – Волевича. Поразительно, что и Лере, и Дуглис с Ниренбергом проморгали напрашивающуюся связь своих результатов с линейным программированием, что на них не нашелся некий аналог Ф. В. Широкова.

В середине шестидесятых годов мы с Л. Р. вели общий семинар в Московском университете. У Лени появились тогда первые ученики — Володя Каган и Агададаш Мехтиев. Володя сначала был моим учеником по инженерному потоку, а потом заинтересовался тематикой Л. Р.(инженерный поток мех-мата начала шестидесятых годов — это тоже интереснейшая тема, отражающая изгиб нашей истории после смерти вождя). На долгие годы В. М.Каган стал другом семьи Волевичей, но стать математиком у него так и не получилось. У нас с Лёней был и общий ученик — Александр Иванович Камзолов: первая глава его диссертации написана по моей теме, а вторая — по Лёниной.

Я обязан нашим с ним общим занятиям пониманию удивительной простоты (и красоты) теории обобщенных функций. На первом занятии нашего семинара Л. Р. объяснил, что обобщенные функции наиболее просто вводить не в $\mathbb{R}^n$, где надо преодолевать определенные трудности, а на компактных многообразиях, на сферах, торах и т.п. Для третьекурсников, пришедших на наш семинар, он построил в несколько минут теорию обобщенных функций на окружности. И я поразился, как, построив свой знаменитый пример, Адамар (которого мой учитель Андрей Николаевич Колмогоров ценил, как одного из двух, наряду с Гильбертом, величайших математиков двадцатого века) прошел мимо лежащей даже не в шаге, а в полушаге от этого примера теории обобщенных функций, шкалы соболевских пространств и правильной постановки задачи Дирихле в круге. И также удивление вызывала задержка с совершенно прозрачным понятием псевдодифференциального оператора, которые стали предметом исследования Л. Р. на долгие годы, причем стартовал он почти одновременно с Коном и Ниренбергом.

Несколько последних десятилетий Леонид Романович исполнял очень важный общественный долг: на его плечи легло издание Трудов Московского математического общества. Первые тома появились в сороковые годы. Редакционная коллегия состояла из П. С. Александрова, И. М. Гельфанда и О. Н. Головина. Четырнадцатый том вышел в 1959 году. А потом дело застопорилось. В 1965 году И. Г. Петровский предложил возглавить редакционную коллегию Ольге Арсеньевне Олейник. Она предложила Леониду Романовичу стать заместителем главного редактора. Он согласился и стал тем человеком, который фактически вел всю работу по организации этого издания. В этом году выйдет 67 том Трудов. В эти пятьдесят два тома вложен огромный труд Леонида Романовича.

В последние годы Леонид Романович очень много путешествовал. Где он только не побывал! Корея, Алжир, Южная Африка, Китай, Соединенные Штаты, Многие страны Европы. Особенно много бывал в Германии.

Как не вспомнить нашу встречу в Регенсбурге? Я оказался в Германии одновременно с Л. Р., но довольно далеко от Регенсбурга, в Иене, но не мог отказать себе во встрече с Лёней. Каким трогательным “хозяином” был в тот день Леня! Как он старался угостить меня, устроить удобный ночлег, как интересно было бродить с ним по городу...

11 июля 2006 года Леня собрал своих друзей. Ему исполнилось 72 года. В своих тостах мы все восхваляли его, Иру, детей. А потом он сам взял слово. Мне не раз в светлые его минуты доводилось слышать от него хвалу своей судьбе за то, что ему выпало счастье обрести в жизни много любви — к отцу и матери, к жене и детям, к своим близким и друзьям. Об этом же был и тот его тост. Кто мог подумать, что он последний ...

А потом мы оба оказались в Крыму. Я выбрался в Ласпи впервые, по его протекции. Это были счастливые минуты, мы снова были вместе летом, как многократно бывали в пору нашей юности. Лёне тяжело было ходить, но не казалось, что это предвестие конца. Но потом ему становилось все хуже и хуже. О самом конце я уже сказал...

Мой незабвенный друг был необыкновенно добрым, теплым человеком, участливым и верным товарищем. Он был наделен творческим даром, широким кругом интересов и большой человеческой мудростью.

Когда готовилась юбилейная статья для “Успехов”, я написал: “Леонида Романовича Волевича отличает необычайная человеческая надежность и верность дружбе.” Это было сказано о живом. Когда после крематория друзья и родные собрались вместе, первое слово взяла Ира. Она замечательно сказала о своем муже, и первые слова ее были те же: верность и надежность. И еще она сказала: “за Лёней я была, как за каменной стеной” — слова, которые мне ранее доводилось слышать только от одного человека — любимой бабушки моей. Так она говорила о своем муже, моем дедушке, а они оба и вырастили меня, так что я знаю цену этих слов.

Повторю то, что сказал перед гробом: “Я не в силах сказать тебе «Прощай». Ты останешься со мной до моего последнего вздоха.

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.5 MSC2000: 41A45,41A46

О.Ю. Агарева

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПО НЕТОЧНОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

1. Постановки

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода с ядром, зависящим от модуля разности аргументов:

$$\mathrm{f}(t) + \int_{-\pi}^{\pi} |t-x|\, f(x)\, d\,x = g(t). \tag{1}$$

Считаем, что функция $g(t)$ — четная, тогда ее ряд Фурье:

$$g(t) = \frac{\mathrm{a}_0\,(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n\,(g) \cos\ nt, \tag{2}$$

где коэффициенты Фурье

$$\mathrm{a}_{\,n}\,(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g\,(x) \cos\ nx\; dx.$$

Ряд Фурье для ядра уравнения (1) имеет вид:

$$|t-x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2n+1)\,(t-x)\right)}{(2n+1)^2}. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде ряда:

$$f(t) = \frac{\mathrm{c}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{c}_n \cos\ nt. \tag{4}$$

Подставляем (2), (3), (4) в (1), получаем коэффициенты Фурье:

$$\mathrm{c}_0 = \frac{\mathrm{a}_0\,(g)}{1+\pi^2}; \quad \mathrm{c}_{2n} = \mathrm{a}_{2n}\,(g)\,; \quad \mathrm{c}_{2n+1} = \frac{\mathrm{a}_{2n+1}\,(g)}{1-\frac{4}{(2n+1)^2}}.$$

Тогда точное решение (4) задачи (1) запишется в виде:

$$f(t) = \frac{\mathrm{a}_0\,(g)}{2\,(1+\pi^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_{2n}\,(g) \cos\ 2nt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{a}_{2n+1}\,(g) \cos\ (2n+1)\,t}{1-\frac{4}{(2n+1)^2}}. \tag{5}$$

Предположим, что $g(t) \in W_2^r([-\pi,\pi])$, где

$$W_2^r([-\pi,\pi]) = \{\, f(\cdot) \in L_2([-\pi,\pi]) : f^{(r-1)}(\cdot) \text{ абс. непр. на } [-\pi,\pi], \quad \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2([-\pi,\pi])} \le 1\,\},$$

а

$$\|g\,(\cdot)\|_{\,L_2([-\pi;\pi])} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g\,(t)|^2\, dt}.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых $N+1$ коэффициентов Фурье функции $g(\cdot)$, $y_0, y_1, \ldots, y_N$, причем

$$\sum_{i=0}^{N} \left|\mathrm{a}_i\left(g\right)-y_i\right|^2 \le \delta^2, \quad \delta>0. \tag{6}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (1) на классе $W_2^r\ \ ([-\pi;\pi])$ по информационному оператору F_δ^{N+1}, который каждой функции $g(t)\in W_2^r\ \ ([-\pi;\pi])$ сопоставляет множество векторов $y=(y_0,y_1,\ldots,y_N)$, удовлетворяющих условию (6).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi: R^{N+1}\to L_2\ \ ([-\pi;\pi])$. Погрешностью восстановления для данного метода φ назовем величину

$$e\left(W_2^r\ \ ([-\pi;\pi])\,,\ F_\delta^{N+1},\ \varphi\right)= \\ =\sup_{\substack{g(t)\in W_2^r\ \ ([-\pi;\pi]),\ y=(y_0,\ldots,y_N)\in R^{N+1}\\ \sum_{i=0}^{N}|\ \mathrm{a}_i(g)-y_i|^2\le\delta^2}} \left\|f\left(\cdot\right)-\varphi\left(y\right)\left(\cdot\right)\right\|_{L_2([-\pi,\pi])}.$$

Величина

$$E\left(W_2^r\ \ ([-\pi;\pi])\,,\ F_\delta^{N+1}\right)=\inf_{\varphi:\ \mathrm{R}^{N+1}\to L_2\ ([-\pi;\pi])} e\left(W_2^r\ \ ([-\pi;\pi])\,,\ F_\delta^{N+1},\ \varphi\right)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

2. Основные результаты

Следуя работам [2],[3], и используя выводы теоремы 1 работы [1], нетрудно получить следующие результаты.

Случай 1. $r=1$.

I). При $\delta\ge\frac{1}{3\sqrt{\pi}}$ $E=\frac{3}{5}$, а метод $f(t)\approx 0$ — оптимальный.

II). При $\delta<\frac{1}{3\sqrt{\pi}}$.

а) Если N— четное, то $E=\sqrt{\frac{81}{25}\pi\delta^2+\frac{1-9\pi\delta^2}{(N-3)^2}}$, а оптимальный метод

$$\mathrm{f(t)}\approx\frac{y_0}{2(1+\pi^2)}+ \\ +\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}\left(\left(1+b\left(N\right)\nu_{2n}\right)^{-1}\mathrm{y}_{2n}\,\mathrm{cos2nt}+\frac{(2n-1)^2(1+b(N)\nu_{2n-1})^{-1}\mathrm{y}_{2n-1}\cos(\mathrm{2n-1})\mathrm{t}}{(2n-3)(2n+1)}\right), \\ b\left(N\right)=\frac{1}{9\pi\left(\left[\frac{3(N-1)(N+3)}{5(N+1)}\right]^2-1\right)},\ \nu_k=\pi k^2.$$

б) Если N— нечетное, то $E=\sqrt{\frac{81}{25}\pi\delta^2+\frac{1-9\pi\delta^2}{(N+1)^2}}$, а оптимальный метод

$$\mathrm{f(t)}\approx\frac{y_0}{2(1+\pi^2)}+ \\ +\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(\left(1+b\left(N\right)\nu_{2n}\right)^{-1}\mathrm{y}_{2n}\,\mathrm{cos2nt}+\frac{(2n-1)^2(1+b(N)\nu_{2n-1})^{-1}\mathrm{y}_{2n-1}\cos(\mathrm{2n-1})\mathrm{t}}{(2n-3)(2n+1)}\right), \\ b\left(N\right)=\frac{1}{9\pi\left(\left[\frac{3(N+1)}{5}\right]^2-1\right)},\ \nu_k=\pi k^2.$$

Случай 2. $r\ge 2(r\ne\infty)$.

I). При $\delta\ge\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $E=\frac{1}{3}$, а метод $f(t)\approx 0$ — оптимальный.

II). а) При $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\le\delta<\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $E=\sqrt{\frac{\pi\delta^2(2^{2r}-9)+8}{2^{2r}-1}}$, а оптимальный метод

$$\mathrm{f(t)}\approx\frac{y_0}{2(1+\pi^2)}+\left(1+b\right)^{-1}\mathrm{y}_1\cos\mathrm{t}+\ \left(1+b2^{2r}\right)^{-1}\mathrm{y}_2\cos 2\mathrm{t}, \\ b=\frac{8}{(2^{2r}-9)}.$$

б) При $\frac{1}{3\sqrt{\pi}} \le \delta < \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ $E = \sqrt{\frac{\pi\delta^2(25\cdot 3^{2r}-81\cdot 2^{2r})+56}{25(3^{2r}-2^{2r})}}$, а оптимальный метод

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} - \frac{1}{3}\left(1+b\right)^{-1} \mathrm{y}_1 \cos \mathrm{t} + \left(1+b2^{2r}\right)^{-1} \mathrm{y}_2 \cos 2\mathrm{t} + $$
$$+\frac{9}{5}\left(1+b3^{2r}\right)^{-1} \mathrm{y}_3 \cos 3\mathrm{t},$$
$$b = \frac{56}{(25\cdot 3^{2r}-81\cdot 2^{2r})}.$$

III). При $\delta < \frac{1}{3\sqrt{\pi}}$

а) Если N— четное, то $E = \sqrt{\frac{81}{25}\pi\delta^2 + \frac{1-3^{2r}\pi\delta^2}{(N-1)^2(N+3)^2(N+1)^{2r-4}}}$, а оптимальный метод

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left(\left(1+b\left(N\right)\nu_{2n}\right)^{-1} \mathrm{y}_{2n} \,\mathrm{cos2nt} + \frac{(2n-1)^2(1+b(N)\nu_{2n-1})^{-1}\mathrm{y}_{2n-1}\cos(2\mathrm{n}-1)\mathrm{t}}{(2n-3)(2n+1)} \right),$$
$$b\left(N\right) = \frac{1}{\pi\left(\left[\frac{9(N-1)(N+3)(N+1)^{r-2}}{5}\right]^2 - 3^{2r}\right)},\ \nu_k = \pi k^{2r}.$$

б) Если N— нечетное, то $E = \sqrt{\frac{81}{25}\pi\delta^2 + \frac{1-3^{2r}\pi\delta^2}{(N+1)^{2r}}}$, а оптимальный метод

$$\mathrm{f(t)} \approx \frac{y_0}{2(1+\pi^2)} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}} \left(\left(1+b\left(N\right)\nu_{2n}\right)^{-1} \mathrm{y}_{2n} \,\mathrm{cos2nt} + \frac{(2n-1)^2(1+b(N)\nu_{2n-1})^{-1}\mathrm{y}_{2n-1}\cos(2\mathrm{n}-1)\mathrm{t}}{(2n-3)(2n+1)} \right),$$

$$b\left(N\right) = \frac{1}{\pi\left(\frac{81(N+1)^{2r}}{25} - 3^{2r}\right)},\ \nu_k = \pi k^{2r}.$$

Список литературы

[1] Выск Н.Д., Осипенко К.Ю. *Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным* // Матем. заметки – 2007. – 81, вып.6 – с.803-815.

[2] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. *Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье,заданным с погрешностью* // Матем. сб. – 2002. – Т.193,–№3 – с.79-100.

[3] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. *Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных* // Функ. анализ и его прил. – 2003. – Т.37, – с.51-64.

"МАТИ" – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского

ул. Оршанская, 3, 121552, Москва, Россия

E-mail: oagareva@ya.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.9 MSC2000: 47B38, 47A56

А.Б. Антоневич
Серинь Алиу Ло

ОБ ОДНОСТОРОННЕЙ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

Введение

Линейный ограниченный оператор B, действующий в банаховом пространстве $F(X)$ функций или вектор-функций на произвольном множестве X, называется *оператором взвешенного сдвига* (ОВС), если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = a(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X, \tag{1}$$

где $\alpha : X \to X$ есть некоторое отображение, a — заданная функция на X. Такие операторы, порожденные ими операторные алгебры и связанные с ними функциональные уравнения изучались многими авторами в различных функциональных пространствах (см. например [1]).

Спектральные свойства ОВС зависят от всех компонент – от динамики отображения α, от коэффициента a и от рассматриваемого пространства $F(X)$. По динамикой отображения понимается поведения траекторий точек при действии итераций этого отображения. Траекторией точки x_0 называется последовательность точек $x_n = \alpha_k(x_0),\ k \in \mathbb{Z}, \alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1})$.

Наряду с нахождением спектра оператора B, т.е. получением условий обратимости операторов вида $B - \lambda I$, представляют интерес описание более тонких свойств оператора $B - \lambda I$ в случае, когда λ принадлежит спектру. Это такие свойства, как замкнутость образа оператора, размерность ядра и коядра, существование одностороннего обратного оператора.

Для операторов взвешенного сдвига тонкие свойства оператора зависят от конкретной природы отображения α и в общем случае не исследованы. Для специальных классов отображений тонкие свойства оператора операторов взвешенного сдвига рассматривались, например, в [2]-[6], где имеется обзор литературы. В первую очередь были рассмотрены отображения, у которых неподвижные точки являются либо притягивающими, либо отталкивающими [2, 4].

В [5] впервые получено описание тонких спектральных свойств для конкретного класса операторов взвешенного сдвига в пространстве $L_2(X, \mu)$ для случая, когда у порождающего отображения α имеется седловая точка. Для другого модельного класса отображений, у которых имеется несколько седловых точек, описание тонких спектральных свойств оператора в пространстве $L_2(X, \mu)$ получено в [6]. Эти результаты показывают, что наличие седловых точек у отображения α приводит к существенному изменению тонких спектральных свойств оператора.

В данной работе аналогичная задача в случае отображений, у которых имеется несколько седловых точек, рассмотрена в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на X. Основное внимание уделено свойству односторонней обратимости. Тонкие спектральные свойства и условия существования одностороннего обратного оператора в случае пространства $C(X)$ имеют вид, аналогичный случаю пространства $L_2(X, \mu)$. Однако метод доказательства, использованный в [6], не применим в случае пространства $C(X)$. Поэтому доказательства утверждений пришлось либо модифицировать, либо использовать для доказательства другие соображения.

1. Постановка задачи

Мы рассматриваем следующий наиболее простой пример отображения, имеющего две седловые точки. Пусть X есть симплекс в пространстве $\mathbb{R}^3$ вида

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_1 \le x_2 \le x_3\}. \tag{2}$$

Пусть γ есть непрерывное биективное отображение отрезка $[0,1]$ на себя, имеющее только две неподвижные точки 0 и 1. Кроме того, будем считать, что $\gamma(t) > t$ при $0 < t < 1$. Рассмотрим на X т.н. диагональное отображение α, заданное формулой

$$\alpha(x) = (\gamma(x_1), \gamma(x_2), \gamma(x_3)).$$

В силу монотонности γ отображение α является гомеоморфизмом пространства X на себя. Это отображение имеет четыре неподвижные точки

$$F(0) = (0,0,0),\ F(1) = (0,0,1),\ F(2) = (0,1,1),\ F(4) = (1,1,1).$$

При этом точка $F(0)$ является *отталкивающей* — траектории всех точек из ее малой окрестности (за исключением самой точки $F(0)$) выходят из этой окрестности; точка $F(4)$ является *притягивающей* – траектории всех точек из ее малой окрестности стремятся к точке $F(4)$; точка $F(2)$ является *седловой* точкой – траектории части точек из малой окрестности стремятся к точке $F(2)$, а траектории остальных точек из малой окрестности выходят из этой окрестности; точка $F(3)$ также является седловой точкой.

В пространстве $C(X)$ мы рассматриваем операторы вида (1), где $a \in C(X)$ и при этом $a(x) \ne 0$ для всех $x \in X$. Как известно [1], спектр такого оператора есть кольцо:

$$\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : r \le |\lambda| \le R\},$$

где $r = \min_k\{|a(F(k))|\}$, $R = \max_k\{|a(F(k))|\}$. Чтобы не рассматривать случаи вырождения, мы предполагаем ниже, что все числа $|a(F(k))|$ различны. Тогда четыре окружности

$$S(k) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |a(F(k))|\}$$

разбивают $\sigma(B)$ на три кольца.

Свойства оператора $B - \lambda I$ могут быть различными для λ, принадлежащих разным кольцам, причем свойства зависят от того, как расположены числа $|a(F(k))|$, если их упорядочить в порядке возрастания. Здесь возможны $4! = 24$ различных случаев упорядочивания. Чтобы избежать громоздких формулировок, в данной работе мы рассматриваем только два случая упорядочивания, наиболее интересные с точки зрения описания спектральных свойств:

$$|a(F(1))| < |a(F(2))| < |a(F(3))| < |a(F(4))|; \tag{3}$$

$$|a(F(1))| < |a(F(3))| < |a(F(2))| < |a(F(4))|. \tag{4}$$

Основной результат утверждает, что спектральные свойства оператора B в этих двух случаях существенно различны. В частности, значения коэффициента a в седловой точке $F(2)$ и в седловой точке $F(3)$ по разному влияют на спектральные свойства оператора. Это связано с некоторым упорядочиванием неподвижных точек, порожденным отображением α: точка $F(2)$ предшествует точке $F(3)$ в том смысле, что в окрестности $F(2)$ есть точки, траектории которых стремятся к $F(3)$, а в окрестности $F(3)$ нет точек, траектории которых стремятся к точке $F(2)$.

Геометрический смысл полученных условий следующий: оператор $B - \lambda I$ односторонне обратим тогда и только тогда, когда симплекс X можно разрезать некоторой плоскостью, не проходящей через точки $F(k)$, таким образом, что для всех $F(k)$, которые лежат по одну сторону от указанной плоскости, выполнено $|a(F(k))| < |\lambda|$, а для $F(k)$, которые лежат по другую сторону плоскости, выполнено $|a(F(k))| > |\lambda|$.

2. Условия односторонней обратимости

Теорема 1. *Пусть B есть оператор вида (1) в пространстве $C(X)$, где X есть симплекс (2), выполнены сделанные выше предположения и пусть λ есть спектральное значение для B.*

Если числа $|a(F(k))|$ упорядочены по правилу (3), то для существования правого обратного к оператору $B-\lambda I$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$|\lambda| \neq |a(F(k))| \text{ для всех } k = 1,2,3,4.$$

Если числа $|a(F(k))|$ упорядочены по правилу (4), то для существования правого обратного к оператору $B-\lambda I$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$|a(F(1))| < |\lambda| < |a(F(3))|$$

или условия

$$|a(F(2))| < |\lambda| < |a(F(4))|.$$

При этом для значений λ, удовлетворяющих условию $|a(F(3)| < |\lambda| < |a(F(2)|$, образ оператора $B-\lambda I$ является незамкнутым всюду плотным множеством.

Таким образом, при упорядочивании (3) в спектре имеются только четыре окружности, при которых оператор $B-\lambda I$ не является обратимым справа.

А при упорядочивании (4) в спектре появляется целое кольцо

$$\{\lambda : |a(F(3))| \le |\lambda| \le |a(F(2))|\},$$

для которого оператор $B-\lambda I$ не является обратимым справа.

Доказательство. Существование ограниченного правого обратного при соответствующих условиях доказывается с помощью его явного построения. Здесь основное наблюдение заключается в том, что для разных λ правые обратные строятся по разным формулам.

Пусть φ есть непрерывная функция на [0,1], удовлетворяющая условиям:

$\varphi(t) = 1$ при $0 \le t \le 1/2$;

$\varphi(t) = 0$ при $\gamma(1/2) \le t \le 1$;

$0 < \varphi(t) < 1$ при $1/2 \le t \le \gamma(1/2)$.

Зададим три оператора, действующие как умножение на функцию:

$$\Phi_j u(x) = \varphi(x_j)u(x), \; j = 1,2,3.$$

Рассмотрим три ряда из операторов:

$$R_j = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{i+1}}(B)^i \Phi_j + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i (B)^{-i}[I - \Phi_j], \; j = 1,2,3. \tag{5}$$

Пусть выполнено (3). Оказывается, что при

$$|a(F(1))| < |\lambda| < |a(F(2))|$$

сходится ряд (5) при $j = 1$, а два остальных ряда расходятся.

При

$$|a(F(2))| < |\lambda| < |a(F(3))|$$

сходится ряд (5) при $j = 2$, а два остальных ряда расходятся.

При

$$|a(F(3))| < |\lambda| < |a(F(4))|$$

сходится ряд (5) при $j = 3$, а два остальных ряда расходятся.

Если выполнено (4), то ситуация другая. При

$$|a(F(3))| < |\lambda| < |a(F(2))| \tag{6}$$

все три ряда расходятся, при

$$|a(F(1))| < |\lambda| < |a(F(3))|$$

сходится ряд (5), если $j = 1$, а при

$$|a(F(2))| < |\lambda| < |a(F(4))|$$

сходится ряд (5), если $j = 3$.

Сходимость соответствующих рядов доказывается с помощью непосредственной оценки норм слагаемых в (5). При этом, в зависимости от неравенств, выполненных для λ, выбор значения j определяется следующим правилом: плоскость $x_j = 1/2$ разделяет неподвижные точки таким образом, что те $F(k)$, для которых выполнено $|a(F(k))| < |\lambda|$, лежат по одну сторону от указанной плоскости, а точки, для которых выполнено $|a(F(k))| > |\lambda|$, лежат по другую сторону плоскости. При выполнении (5) такой плоскости не существует.

Доказательство того, что сформулированные условия на λ являются необходимыми для правосторонней обратимости, требует привлечения других соображений. В частности, необходимость не следует из расходимости рассмотренных рядов (5).

Если R есть правый обратный к оператору $B - \lambda I$, то для любой функции f из пространства $C(X)$ функция $u = Rf$ является непрерывным решением уравнения

$$(B - \lambda I)u = f. \tag{7}$$

Доказательство необходимости заключается в проверке того, что существуют такие функции $f \in C(X)$, для которых все решения u уравнения (7) являются разрывными функциями. Основная техническая сложность связана с тем, что при заданном f уравнение (7) в пространстве всех функций имеет бесконечно много решений и следует анализировать поведение всех решений.

При этом оказывается, что если выполнены неравенства (4) и (6), то решения u могут быть непрерывными во внутренних точках симплекса X, но имеют разрывы на ребре, соединяющем седловые точки $F(2)$ и $F(3)$.

Если $|\lambda| = |a(F(2))|$, то все решения u уравнения (7) разрывны в точке $F(2)$, хотя могут быть непрерывными во внутренних точках симплекса X.

Если $|\lambda| = |a(F(3))|$, то все решения u уравнения (7) разрывны в точке $F(3)$. $\square$

Список литературы

[1] Антоневич А.Б. *Линейные функциональные уравнения: операторный подход.* — Минск, Университетское, 1988, 231 с.

[2] Карлович Ю.И., Мардиев Р. *Односторонняя обратимость функциональных операторов с некарлемановским сдвигом в пространствах Гельдера* // Изв. ВУЗов. Математика. — 1987. — 3. — С. 77-80.

[3] Belitskii G., Lyubich Yu. *On the normal solvability of cohomological equations on locally compact topological spaces.* Nonlinear analysis and related problems, Tr. Inst.Mat. Minsk, **2** (1999), 44-51.

[4] Антоневич А.Б. *Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения и существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке* // Функцион. анализ и его прил. — 2005.— 39, вып.1. — С. 11-26.

[5] Антоневич А.Б. Якубовска Ю. *Влияние седловых точек на тонкие спектральные свойства операторов взвешенного сдвига* // Вестн. Белгосуниверситета. Сер.1. — 2006. — 3. — С. 86 -93.

[6] Antonevich A. B. , Makowska Ju. *On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points* // Complex Analysis and Operator theory. 2008. 23 p (in print).

Белорусский государственный университет
пр-т Независимости, 4, 220050, Минск, Беларусь
Institute of Mathematics University of Bialystok
Akademicka 2, 15-267, Bialystok, Poland
E-mail: antonevich@bsu.by

Universite Cheikh Anta Diop de Dakar
Dakar, Senegal
E-mail: losa2006@gmail.com

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 519.833 MSC2000: 27.47.19

А.Е. Бардин

ГАРАНТИРОВАННОЕ РЕШЕНИЕ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С УЧЕТОМ РИСКОВ

Будем рассматривать математическую (игровую) модель иерархической системы, которая состоит из одного элемента верхнего уровня (центра) и N элементов нижнего уровня. Кроме этого в модели учтены действия неопределенных факторов (неопределенностей). Примем следующие предположения (правила игры).

Первый ход делает центр, выбирая стратегию u из множества U допустимых стратегий. Независимо от действий центра реализуется значение $y \in Y$ неопределенных факторов . Каждый i-й игрок нижнего уровня, выбирая стратегию $x_i \in X_i$, имеет информацию как о стратегии u центра, так и о значении $y \in Y$. Согласно подходу в работе [1], контрстратегию игрока i нижнего уровня отождествим с произвольной функцией $x_i(\cdot) : U \times Y \to X_i$, которая каждой паре $(u, y) \in U \times Y$ ставит в соответствие чистую стратегию $x_i \in X_i$. В свою очередь, игрок верхнего уровня (центр) знает только область Y возможных значений неопределенных факторов. В связи с этим неопределенности (по отношению к центру) будем отождествлять с функциями вида $y(\cdot) : U \to Y$.

Будем также предполагать, что каждый набор

$$(u, x_1, x_2, ..., x_N, y) \in U \times X_1 \times X_2 \times ... \times X_N \times Y$$

игроки оценивает по двум критериям: своим функциям выигрыша и функциям риска, которые формализуются на основе принципа минимаксного сожаления (риска) Сэвиджа [1], [2], [3].

Рассмотрим математическую модель в виде иерархической игры N лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \{X_i^{U\times Y}\}_{i\in\mathbb{N}}, U, Y^U, \{f_i(u, x, y), -\Phi_i(u, x, y)\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\rangle.$$

Здесь номер 0 соответствует центру, а $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$ - множество порядковых номеров игроков нижнего уровня иерархии, $U \subset \mathbb{R}^n$ - набор всех стратегий центра, $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ есть множество чистых стратегий i-го игрока нижнего уровня, $i \in \mathbb{N}$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ - совокупность всех значений неопределенных факторов. Множество $X_i^{U\times Y}$ - набор всех контрстратегий (произвольных функций) $x_i(\cdot)$ i-го игрока нижнего уровня, то есть,

$$X_i^{U\times Y} = \{x_i(\cdot) : U \times Y \to X_i\}.$$

Множество неопределенностей $y(\cdot)$ (по отношению к центру) обозначено Y^U. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ - набор чистых стратегий игроков нижнего уровня и множество $X = \prod_{i=1}^{N} X_i$ есть совокупность всех таких наборов. Функция выигрыша $f_i(u, x, y)$, $i \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ i-го игрока определена на множестве $U \times X \times Y$. В дальнейшем будем предполагать, что множества U, X_i, Y - компакты соответствующих евклидовых пространств и функции $f_i(u, x, y)$, $i \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ непрерывны на $U \times X \times Y$. Тогда функции риска игроков нижнего уровня определяем следующим образом:

$$\Phi_i(u, x, y) = \max_{z_i\in X_i} f_i(u, x \parallel z_i, y) - f_i(u, x, y), i \in \mathbb{N},$$

где используем обозначение $(u, x||z_i, y) = (u, x_1, ..., x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, ..., x_N, y)$.

Функция риска центра есть

$$\Phi_0(u, x, y) = \max_{z\in U} f_0(z, x, y) - f_0(u, x, y).$$

Принятые выше ограничения на множества $U, X_i, i \in \mathbb{N}, Y$ и функции $f_i(u,x,y)$ обеспечивают существование и непрерывность на $U \times X \times Y$ функций риска $\Phi_i(u,x,y), i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

На "содержательном уровне"цель каждого игрока $i \in \mathbb{N}$ нижнего уровня (соответственно, центра) в игре Γ состоит в выборе такой своей контрстратегии $x_i(\cdot) \in X_i^{U\times Y}$ (соответственно, стратегии $u \in U$ центра), при которой его выигрыш, то есть значение функции $f_i(u,x,y), i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, стал бы возможно большим и одновременно риск (значение функции $\Phi_i(u,x,y), i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$) - возможно меньшим.

Рассмотрим вспомогательную бескоалиционную игру N лиц

$$\hat{\Gamma} = \langle \mathbb{N}, \{X_i^{U\times Y}\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(u, x(u,y), y)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle,$$

компоненты которой определены выше для игры Γ.

Ситуация в контрстратегиях $x^e(\cdot) = (x_1^e(\cdot), ..., x_N^e(\cdot)) \in X^{U\times Y} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i^{U\times Y}$ называется равновесной (по Нэшу) в игре $\hat{\Gamma}$, если при любом $i \in \mathbb{N}$ и для всех пар $(u,y) \in U \times Y$ и произвольной функции $x_i(\cdot) \in X_i^{U\times Y}$ справедливо неравенство

$$f_i(u, x^e(u,y) || x_i(u,y), y) \le f_i(u, x^e(u,y), y).$$

Пусть множество $X^e(\cdot)$ есть совокупность всех равновесных ситуаций в контрстратегиях в игре $\hat{\Gamma}$. Далее будем использовать обозначение:

$$X^e[u,y] = \{x^e(u,y) | x^e(\cdot) \in X^e(\cdot)\}.$$

Примем, что множества $X_i, i \in \mathbb{N}$ - непустые, выпуклые и компактные подмножества соответствующих евклидовых пространств, также функции выигрыша $f_i(u,x,y)$ игроков нижнего уровня непрерывны на множестве X и вогнуты по переменной $x_i \in X_i, i \in \mathbb{N}$. Из теории бескоалиционных игр известно, что при указанных выше предположениях для любой пары $(u,y) \in U \times Y$ множество $X^e[u,y]$ непусто и компактно.

Замечание 1. Если $x^e(\cdot)$ - равновесная по Нэшу ситуация в контрстратегиях в игре $\hat{\Gamma}$, то для любой пары $(u,y) \in U \times Y$ выполнено

$$\Phi_i(u, x^e(u,y), y) = 0, i \in \mathbb{N},$$

то есть в ситуации равновесия в контрстратегиях игры $\hat{\Gamma}$ риски всех игроков нижнего уровня равны 0.

Перейдем к формализации гарантирующего решения центра. Учитывая непрерывность функции $f_0(u,x,y)$ по переменной x и компактность множества $X^e[u,y]$, получаем существование следующего минимума для всех $(u,y) \in U \times Y$

$$f_0^\star(u,y) = \min_{z\in X^e[u,y]} f_0(u,z,y).$$

Определим функцию

$$f_1^\star(u,y) = -(\sup_{z\in U} f_0^\star(z,y) - f_0^\star(u,y))$$

и рассмотрим двухкритериальную задачу при неопределенности

$$P = \langle U, Y^U, F^\star(u, y(u)) = (f_0^\star(u,y(u)), f_1^\star(u,y(u))) \rangle,$$

компоненты которой определены выше. В этой задаче центр выбором своей стратегии $u \in U$ стремится достичь одновременно возможно больших значений всех компонент векторного критерия $F^\star(u,y(u))$, при этом игрок верхнего уровня должен учитывать возможность реализации любой неопределенности $y(\cdot)) \in Y^U$. Согласно [1], в качестве оптимального решения задачи P используем ε - седловую точку по Слейтеру.

Зададим вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где числа $\varepsilon_k \ge 0, k \in \{1,2\}$. Как известно [1], векторной ε - седловой точкой по Слейтеру в задаче P называется пара $(u_*^\varepsilon, y_*^S(\cdot)) \in U \times Y^U$, для которой выполнены следующие условия.

Во-первых, для любой неопределенности $y(\cdot) \in Y^U$ несовместна система неравенств

$$\begin{cases} f_0^\star(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)) > f_0^\star(u_*^\varepsilon, y(u_*^\varepsilon)) + \varepsilon_1, \\ f_1^\star(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)) > f_1^\star(u_*^\varepsilon, y(u_*^\varepsilon)) + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Во-вторых, при всех стратегиях центра $u \in U$ также не имеет решений система

$$\begin{cases} f_0^\star(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)) < f_0^\star(u, y_*^S(u)) - \varepsilon_1, \\ f_1^\star(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)) < f_1^\star(u, y_*^S(u)) - \varepsilon_2. \end{cases}$$

Определение 1. Пусть задан вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с неотрицательными компонентами. Набор $(u_*^\varepsilon, x^e(\cdot), f_0^*, \Phi_0^*)$ назовем ε - гарантированным по выигрышам и рискам решением в игре Γ, если

1^0 ситуация $x^e(\cdot) \in X^{U\times Y}$ является равновесием в контрстратегиях в бескоалиционной игре N лиц

$$\hat{\Gamma} = \langle \mathbb{N}, \{X_i^{U\times Y}\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(u, x(u,y), y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle;$$

2^0 существует неопределенность $y_*^S(\cdot) \in Y^U$, для которой пара $(u_*^\varepsilon, y_*^S(\cdot))$ является векторной ε - седловой точкой по Слейтеру в двухкритериальной задаче при неопределенности

$$P = \langle U, Y^U, F^\star(u, y(u)) = (f_0^\star(u, y(u)), f_1^\star(u, y(u)))\rangle;$$

3^0 ε_1 - гарантия выигрыша центра равна

$$f_0^* = f_0(u_*^\varepsilon, x^e(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)), y_*^S(u_*^\varepsilon)),$$

ε_2 - гарантия риска центра есть

$$\Phi_0^* = \Phi_0(u_*^\varepsilon, x^e(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)), y_*^S(u_*^\varepsilon)).$$

Теорема 1. *Пусть в игре Γ для любого игрока $i \in \{1, 2, ..., N\}$ нижнего уровня набор X_i чистых стратегий представляет собой непустое, выпуклое и компактное множество соответствующего евклидова пространства. Множества $U \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ также компакты. Функции $f_i(u, x, y), i \in \{0, 1, 2, ..., N\}$ непрерывны на произведении $U \times X_1 \times X_2 \times ... \times X_N \times Y$ компактов. При этом функции $f_i(u, x, y)$ вогнуты по переменной $x_i, i \in \{1, 2, ..., N\}$. Тогда для любого вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с положительными компонентами существует гарантированное по выигрышам и рискам решение исходной игры Γ, при этом риски всех игроков нижнего уровня равны 0.*

Доказательство. Как было отмечено выше, из того, что множества $X_i, i \in \mathbb{N}$ - непустые, выпуклые и компактные подмножества соответствующих евклидовых пространств и функции выигрыша $f_i(u, x, y), i \in \mathbb{N}$ игроков нижнего уровня непрерывны на множестве X и вогнуты по переменной $x_i \in X_i, i \in \mathbb{N}$, имеем для любой пары $(u, y) \in U \times Y$ непустоту и компактность множества $X^e[u, y]$ равновесий по Нэшу в бескоалиционной игре N лиц

$$\hat{\Gamma}[u, y] = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(u, x, y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

в которой пара $(u, y) \in U \times Y$ зафиксирована. Отсюда получаем существование ситуации $x^e(\cdot) \in X^{U\times Y}$, которая является равновесием в контрстратегиях в игре $\hat{\Gamma}$.

Рассмотрим стратегию центра $u \in U$ и неопределенность $y(\cdot) \in Y^U$. Далее зададим число $\alpha \in (0, 1)$ и введем обозначение:

$$F_\alpha(u, y(u)) = (1 - \alpha) f_0^\star(u, y(u)) + \alpha f_1^\star(u, y(u)),$$

где

$$f_0^\star(u, y(u)) = \min_{z\in X^e[u,y(u)]} f_0(u, z, y(u)), f_1^\star(u, y(u)) = -(\sup_{z\in U} f_0^\star(z, y(u)) - f_0^\star(u, y(u))).$$

Рассмотрим антагонистическую игру с информированным вторым игроком

$$\Gamma_\star = \langle \{1, 2\}, U, Y^U, F_\alpha(u, y(u))\rangle,$$

компоненты которой определены выше. Пусть $\varepsilon_\star$ - произвольное неотрицательное действительное число. Ситуация $(u_{\varepsilon_\star}, y_{\varepsilon_\star}(\cdot)) \in U \times Y^U$ называется $\varepsilon_\star$ - равновесной в игре $\Gamma_\star$, если для всех стратегий $u \in U$ и любой неопределенности $y(\cdot) \in Y^U$ выполнено

$$F_\alpha(u, y_{\varepsilon_\star}(u)) - \varepsilon_\star \le F_\alpha(u_{\varepsilon_\star}, y_{\varepsilon_\star}(u_{\varepsilon_\star})) \le F_\alpha(u_{\varepsilon_\star}, y(u_{\varepsilon_\star})) + \varepsilon_\star$$

В работе [4] показано, что для класса игр с информированным вторым игроком, к которому относится и игра $\Gamma_\star$, при любом $\varepsilon_\star > 0$ существует ситуация $\varepsilon_\star$- равновесия.

Согласно условию теоремы, предполагаем заданным вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с положительными компонентами. Возьмем $\varepsilon_\star = 0.5 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тогда $\varepsilon_\star$ - равновесной ситуации $(u_{\varepsilon_\star}, y_{\varepsilon_\star}(\cdot)) \in U \times Y^U$ в игре $\Gamma_\star$ соответствует векторная ε - седловая точка по Слейтеру в задаче P. Именно, положив $u_*^\varepsilon = u_{\varepsilon_\star}, y_*^S(\cdot) = y_{\varepsilon_\star}(\cdot)$, получаем для любой неопределенности $y(\cdot) \in Y^U$ и при всех стратегиях центра $u \in U$ несовместность следующих систем:

$$\begin{cases} f_0^\star(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)) > f_0^\star(u_*^\varepsilon, y(u_*^\varepsilon)) + \varepsilon_1, \\ f_1^\star(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)) > f_1^\star(u_*^\varepsilon, y(u_*^\varepsilon)) + \varepsilon_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0^\star(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)) < f_0^\star(u, y_*^S(u)) - \varepsilon_1, \\ f_1^\star(u_*^\varepsilon, y_*^S(u_*^\varepsilon)) < f_1^\star(u, y_*^S(u)) - \varepsilon_2. \end{cases}$$

Указанную несовместность несложно доказать методом "от противного". Таким образом, установлено существование пары $(x^e(\cdot), u_{\varepsilon_\star})$ из определения 1. Теорема доказана. □

Замечание 2. В данной работе игра Г является обобщением так называемой игры Γ_1 из теории игр Гермейера [5] на случай N игроков нижнего уровня, действия неопределенных факторов и учета рисков в соответствии с общим подходом, предложенным Жуковским В.И. [1]. Формализация ε - гарантированного по выигрышам и рискам решения игры Г соответствует принципу гарантированного результата [5], который учитывает информируемость центра о поведении игроков нижнего уровня.

Список литературы

[1] Жуковский В.И. *Конфликты и риски* М.: 2007.

[2] Bardin A.E. *Regret concept in non-cooperative game.* // Int. J. of Math., Game Theory, and Algebra, Nova Sci. Publ. N.Y.,Vol.7,N.2/3: 1997.,P.75-79

[3] Savage L.Y. *The Theory of Statistical Decision.* // J.American Statistic Association. N 46, 1951. P. 55-67. .

[4] Воробьев Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры.* М.: Наука 1984.

[5] Гермейер Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* М.: Наука 1976.

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.95 MSC2000: 35J25

С.В. Беседина

МЕТОД ПУАНКАРЕ-ПЕРРОНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Введение

Последнее время интенсивно развивается тематика, связанная с поведением систем составного типа, где элементы системы имеют разные размерности и разные физичесие характеристики. Задачи математической физики, связанные с поведением таких систем, и приводят к уравнениям на стратифицированных множествах. Одним из основных принципов при изучении задач такого типа является интерпретация всех дифференциальных соотношений в виде единого уравнения дивергентного типа. Ранее был изучен вопрос о существовании слабого решения, существование классического решения не рассматривалось. В данной работе приводится реализация метода Пуакаре-Перрона для доказательства существования решения на стратифицированном множестве специального вида.

1. Постановки

Пусть на плоскости имеется некоторая область Ω - стратифицированное множество, граница которого удовлетворяет условию внутренней сферы, то есть является регулярной. Границу области будем считать границей стратифицированного множества - $\partial\Omega_0$, в качестве Ω_0 будем рассматривать $\Omega \setminus \partial\Omega$. Разобьем область на конечное число областей вертикальными и горизонтальными линиями. Полученные ячейки считаются двумерными стратами - σ_{2k}, границы ячеек - одномерные страты - σ_{1j}, нульмерные страты - σ_{0k} - точки пересечения прямых. Строгое определение стратифицированного множества имеется, напимер, в [4].

На множестве задана стратифицированная константа $p(X)$, которая постоянна в пределах двумерных стратов. В остальных стратах (размерности ноль и один) она равна нулю. На подмножествах $\omega \subset \Omega$ задается стратифицированная мера μ следующим соотношением $\mu(\omega) = \sum\limits_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj})$, в котором μ_k - мера Лебега на σ_{kj} , а формула применяется только к таким ω, что $\omega \cap \sigma_{kj}$ измеримы по Лебегу. Интеграл по мере μ определяется как интеграл Лебега. Тогда для суммируемых функций мы имеем: $\int\limits_{\Omega} f d\mu = \sum\limits_{j,k} \int\limits_{\sigma_{kj}} f d\mu_k$.

Векторное поле $\overrightarrow{F}$ назовем касательным к Ω_0, если его сужение на каждый страт является касательным пространством к этому страту. Если $X \in \sigma_{1i}$ то дивергенция поля $\overrightarrow{F}$ в такой точке определяется по формуле:

$$\nabla \overrightarrow{F} = \sum_{\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}} \overrightarrow{\nu} \overrightarrow{F} \mid_{2j} (X) + \nabla_1 \overrightarrow{F}(X), \qquad (1)$$

где $\overrightarrow{\nu}$ единичная нормаль к σ_{1i}, направленная внутрь страта по которому в данный момент идет суммирование. Запись $\overrightarrow{F} \mid_{2j} (X)$ означает продолжение по непрерывности поля $\overrightarrow{F}$ с σ_{2j} в точку. Обозначение $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$ обозначает примыкание двумерных стратов к одномерным $(\overline{\sigma_{2j}} \supset \sigma_{1i})$

Обозначим через $C^1_\sigma(\Omega_0)$- пространство функций, для которых дивергенция определяется по формуле (1) и таких что их сужение на σ_{2i} имеет непрерывные частные производные первого порядка, кроме того они допускают продолжение по непрерывности для любого $\sigma_{1i} \prec \sigma_{2j}$. Через $C^k(\Omega_0)$ обозначим множество функций, непрерывных на Ω_0 и таких, что продолжение сужений u на стратах образуют поля класса $C^k(\Omega_0)$. Тогда можно определить выражение вида

$$\Delta_p u = \nabla(p\nabla u). \tag{2}$$

При ограничениях, наложенных на стратифицированую константу и геометрию рассматриваемого множества оператор $\Delta_p u$ сводится к следующему:

$$p_i\Delta u = 0, X \in \sigma_{2j}, \tag{3}$$

$$\Delta_p u(x) = \sum_{\sigma_{2j}\succ\sigma_{1l}} p_j(\overrightarrow{\nu_j}\nabla u)|_{2_j}(x), X \in \sigma_{1l}, \tag{4}$$

где ν_j нормаль к σ_{1l} направленная внутрь σ_{2j}.

На стратах размерности 0 дифференциальных соотношений нет, а есть только условие непрерывности.

На множестве Ω рассматривается следующая задача Дирихле:

$$\Delta_p u = 0, X \in \Omega_0 \tag{5}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega_0} = \varphi, \tag{6}$$

Основной целью данной работы является доказательство существования решения задачи (5),(6).

Определение. Функцию $u \in C^2_\sigma(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $\Delta_p u = 0$, называется p-гармонической.

Для того, чтобы найти функцию, p-гармоническую в заданной ограниченной области Ω_0, непрерывную в ее замыкании $\overline{\Omega_0}$ и принимающую на границе $\partial\Omega_0$ заданное значение φ, вводится понятие p-субгармонической функции и показывается, что решением является точная верхняя граница множества p-субгармонических функций, значение которых на границе не превосходит заданной функции φ.

2. Исследование

Для доказательства разрешимости задачи (5),(6) мы будем использовать метод субгармонических функций Пуанкаре-Перрона. В этом пункте будут сформулированы и доказаны основные определения и теоремы, которые которые необходимы для его реализации. Прежде всего остановимся на определении шара и введем некоторое подобие локальных координат в шаре (в общем случае стратифицированное множество не является многообразием, и мы не можем ввести на нем систему координат). Если $X \in \sigma_{1i}$, то сначала определяем координатную ось, совпадающую с σ_{1i}, а затем для каждого σ_{2j} дополним еще одной координатной осью x^2, ортогональной к σ_{1i} (где $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$). Если $X \in \sigma_{0l}$, началом системы координат считается точка X, а координатные оси совпадают с одномерными стратами. Такое введение координат оправдано, когда стратифицированное множество имеет более сложную структуру [4]. Здесь приведен лишь частный случай.

При введении координат подобным образом оператор Лапласа для одномерных стратов (4) можно переписать в виде

$$\Delta_p u(x) = \sum_{\sigma_{2j}\succ\sigma_{1i}} p_j\frac{\partial u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Определение. Стратифицированным шаром с центром в точке ξ и радиусом r будем называть множество $B(\xi, r) = \{x : x \in \Omega, \rho(\xi, x) < r\}$.

Если ξ лежит в страте максимальной размерности и $\rho(\xi, \partial\sigma_{2j}) > r$, то мы имеем дело с обычным шаром. Если же центр шара лежит на стратах размерности меньшей 2 и $\rho(\xi, \partial\sigma_{2j}) > r$, то он представляет собой объединение нескольких "лепестков". В случае, когда $\rho(\xi, \partial\sigma_{2j}) < r$ шар имеет достаточно сложный вид, поэтому:

Определение. Будем называть стратифицированный шар простым, если его радиус меньше расстояния от центра шара до стратов, замыкания которых не содержат ξ .

В дальнейшем мы будем рассматривать только простые шары.

Теперь, когда мы определили понятие шара, сформулируем следующую теорему:

Теорема (Теорема о среднем)**.** *Пусть $B(\xi, r)$- простой стартифицированный шар, $u(x)$-p-гармоническая функция, тогда справедливо следующее равенство:*

$$u(\xi) = \frac{1}{\sum\limits_{B_i(\xi,r)} p_i\mu(\partial B_i(\xi,r))} \int\limits_{\partial B(\xi,r)} u(x)pds_r, \tag{8}$$

где $p = p_i$, если $x \in \sigma_{2i}, B_i(\xi,r) = B(\xi,r) \cap \sigma_{2i}$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sum\limits_{B_i(\xi,r)} p_i\mu(\partial B_i(\xi,r))} \int\limits_{\partial B(\xi,r)} u(x)pds_r.$$

Докажем, что $\varphi(r) = \text{const}$, для этого покажем, что $\varphi(r)' = 0$, или что

$$\frac{\varphi(r+\Delta r) - \varphi(r)}{\Delta r} \underset{\Delta r\to 0}{\to} 0.$$

Так как $u(x+\Delta x) - u(x) = \nabla u(x)\Delta x + o(\|\Delta x\|)$ то:

$$\frac{\varphi(r+\Delta r) - \varphi(r)}{\Delta r} = \frac{1}{\sum\limits_{B_i(\xi,r)} p_i\mu(\partial B_i(\xi,r))\Delta r} \int\limits_{\partial B(\xi,r)} p(\nabla u(x)\frac{x}{r}\Delta r)ds_r +$$
$$+ \frac{1}{\sum\limits_{B_i(\xi,r)} p_i\mu(\partial B_i(\xi,r))\Delta r} \int\limits_{\partial B(\xi,r)} po(\Delta r)ds_r$$

Второе слагаемое стремится к нулю покажем, что первый интеграл также будет стремиться к нулю. Для этого преобразуем его учитывая, что для $x \in \sigma_{1m}$ $\sum\limits_{\sigma_{2i}\succ\sigma_{1m}} p_i\dfrac{\partial u}{\partial x^2} = 0$, и тогда $\int\limits_{\sigma_{1m}} \sum\limits_{\sigma_{2i}\succ\sigma_{1m}} p_i\dfrac{\partial u}{\partial x^2}ds_r = 0$, а затем к полученному выражению применим формулу Остроградского-Гаусса.

Тогда мы можем записать интеграл в следующем виде:

$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{\partial B_i(\xi,r)} p_i(\nabla u(x)\frac{x}{r})ds_r + \sum_{\sigma_{1m}\cap B(\xi,r)\neq\varnothing} \int\limits_l \sum_{\sigma_{2i}\succ\sigma_{1m}} p_i\frac{\partial u}{\partial x^2}ds_r, =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{\partial B_i(\xi,r)+l_i} p_i\nabla u(x)\overrightarrow{\nu}ds_r = \sum_{i=1}^n \int\limits_{\partial B_i(\xi,r)+l_i} p_i\triangle u ds_r$$

где $l_i = \bigcup\limits_{\sigma_{2i}\succ\sigma_{1m}} \sigma_{1m}$, $\overrightarrow{\nu}$- нормаль к $\partial B_i(\xi,r) + l_i$.

По условию $u(x)$ p-гармоническая функция, а значит последний интеграл равен нулю. Таким образом: $\dfrac{\varphi(r+\Delta r) - \varphi(r)}{\Delta r} \underset{\Delta r\to 0}{=} 0$, а, следовательно $\varphi(r) = const$.

Найдем значение функции $\varphi(r)$. Заметим, что для достаточно малых r мы можем считать, что выполнено равенство: $\int\limits_{\partial B(\xi,r)} u(x)pds_r = \sum\limits_{B_i(\xi,r)} p_i\mu(\partial B_i(\xi,r))u(\eta)$, где η некоторая внутренняя точка сферы. Тогда при $r \to 0$ $\eta \to \xi$ и, следовательно,

$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\sum\limits_{B_i(\xi,r)} p_i\mu(\partial B_i(\xi,r))}\int\limits_{\partial B(\xi,r)} u(x)pds_r = u(\xi)$, то есть $\varphi(r) = u(\xi)$, при $r \to 0$. Так как $\varphi(r) = const$, тогда $\varphi(r) = u(\xi)$ во всем шаре $B(\xi,r)$. Или, если подставим значение функции $\varphi(r)$ получим доказываемое утверждение.

Таким образом теорема доказана. $\square$

Определение. Функцию $u \in C^2_\sigma(\Omega)$, удовлетворяющую неравенству $\Delta_p u \geq 0$ назовем p-субгармонической.

Сформулируем теперь некоторые свойства p-гармонических и p-субгармонических функций, которые необходимы для реализации метода Пуанкаре-Перрона.

Теорема. *Если p-гармоническая функция и непрерывна в K (K-некоторое компактное подмножество), тогда максимум и минимум достигаются на границе.*

$$\max_K u(X) \leq \max_{\partial K} u(X), \quad \min_{\partial K} u(X) \leq \min_K u(X)$$

Теорема. *Если $v_1, v_2, ..., v_n$- p-субгармонические функции в области Ω, то функция $v = \max(v_1, v_2, ..., v_n)$ так же p-субгармонична.*

Теорема. *Если v p-субгармоническая функция то $M_B[v]$ так же является p-субгармонической функцией. Где функцию $M_B[u]$, определенную на множестве Ω определим как функцию p-гармоническую в шаре B и совпадающую с u в остальных точках множества.*

Для реализации метода Пуанкаре-Перрона нам необходимо фундаментальное решение и формула Пуассона.

Определение. Функция $G(X,Y) : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ называется фундаментальным решением оператора Δ_p в Ω_0, если $G(X,Y) \in C^2_\sigma(\Omega_0 \setminus Y) \cap C(\Omega \setminus Y)$ и для любой финитной функции $\varphi \in C^2_\sigma(\Omega_0) \cup C(\Omega)$ выполнено:

$$\int\limits_{\Omega_0} G(x,\zeta)\Delta_p\varphi(x)d\mu = \varphi(\zeta). \tag{9}$$

Если центр шара лежит в страте размерности 2, то функция Грина имеет классический вид.

Обозначим через $K(x;y)$ классическую функцию Грина задачи Дирихле в 2-мерном шаре $B(0,r)$ из $\mathbb{R}^2$. Учитывая, что $x^2 \geq 0$, с помощью этой функции мы можем определить в стратифицированном простом шаре $B(0,r)$, где центр шара лежит в страте размерности 1, функцию $\widehat{G}(X,Y)$ следующим образом:

$$\widehat{G}(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{p_l + P_l}{2p_l}K(x,y) + \dfrac{p_l - P_l}{2p_l}K(\widehat{x},y), & x,y \in B_l, \\ \\ K(\widehat{x},y), & x \in B_j\ (j \neq l), y \in B_l, \end{cases} \tag{10}$$

где $\widehat{x}$ получается из x заменой x^2 на $-x^2$, а P_l-сумма всех p_j $(j \neq l)$, соответствующих всем $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$. Мы полагаем $P_l = 0$, если к σ_{1i} примыкает только один 2-мерный страт. Положим также $P = P_l + p_l$.

Теорема. $G(X,Y) = \frac{2}{P}\widehat{G}(X,Y)$ *является фундаментальнм решением оператора Δ_p в шаре $B(\xi,r)$.*

Доказательство. Докажем, что $\int\limits_{B(\xi,r)} G(x,\zeta)\Delta_p\varphi(x)d\mu = \varphi(\zeta)$. Мы можем переписать интеграл в виде суммы интегралов. $\sum_{\sigma_{ki}}\int\limits_{\sigma_{ki}} G(x,\zeta)\Delta_p\varphi(x)d\mu =$ Учитывая, что $p = 0$ на стратах σ_{ki} с $k < 2$, выполнены равенства (3),(7), и то что мы рассматриваем простой шар, то получим

$$\sum_{B_j(\xi,r)} p_j \int\limits_{B_j(\xi,r)} G(x,\zeta)\Delta\varphi(x)d\mu + \int\limits_{\sigma_{1i}\cap B_j(\xi,r)} G(x,\zeta)\sum_{B_j(\xi,r)} p_j\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}d\mu.$$

Первая сумма будет равна:

$$\sum_{\substack{B_j(\xi,r)\\ j\neq l}} p_j \int\limits_{B_j(\xi,r)} G(x,\zeta)\Delta\varphi(x)d\mu + p_l \int\limits_{B_l(\xi,r)} G(x,\zeta)\Delta\varphi(x)d\mu.$$

Для первого слагаемого воспользуемся равенством $\int\limits_{\omega} G(x,\zeta)\triangle\varphi d\mu = \int\limits_{\omega} \triangle G(x,\zeta)\varphi d\mu$, и тем, что $G(x,\zeta) = \frac{1}{P}K(\widehat{x},\zeta)$, где $K(\widehat{x},\xi)$-классическая функция Грина, следовательно во всех внутренних точках $B(\xi,r)$ выполнено $\triangle K(\widehat{x},\zeta) = 0$, тогда очевидно $\triangle G(x,\zeta) = 0$; φ обращается в нуль на $\partial B(\xi,r)$; на σ_{1i} оператор Лапласа определяется по формуле (7). Тогда это слагаемое можно записать в следующем виде

$$-\int\limits_{\sigma_{1i}\cap B_j} G(x,\zeta)\sum_{B_j} p_j \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}d\mu\ (j\neq l).$$

Второе слагаемое, учитывая равенство $\int\limits_{\omega} G(x,\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}d\mu = -\int\limits_{\omega} \frac{\partial G(x,\zeta)}{\partial x^2}\varphi d\mu$, а так же то, что $K(x,\zeta)$-функция Грина, запишется в виде:

$$\varphi(\zeta) - \int\limits_{\sigma_{1i}\cap B_l} G(x,\zeta)p_l\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}d\mu.$$

Сложив эти два слагаемых мы получим доказываемое равенство, а, следовательно, рассматриваемая функция $G(X,Y)$является фундаментальным решением опреатора Δ_p в стратифицированном шаре. □

Теперь мы можем выписать формулу Пуассона.

$$u(X) = -\int\limits_{\partial B(\xi,r)} p\varphi(Y)\frac{\partial G(X,Y)}{\partial\nu}d\mu, \tag{11}$$

где $p = p_i$ на σ_{2i}.

В случае, когда центр шара лежит в страте размерности ноль, формула Пуассона имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(\alpha,\rho) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi(\varphi)(\frac{p}{2\pi P} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{p}{2\pi P}\cos 2n\varphi\cos 2n\alpha + \\ + \frac{p_1}{2\pi\widetilde{P}}\sin 2n\varphi\sin 2n\alpha)(\frac{\rho}{R})^{2n})d\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Справедливость этой формулы проверяется непосредственной подстановкой.

Сформулирум теперь еще одну теорему, на которую опирается доказательство существования классического решения.

Теорема. *Пусть ω - компактное подмножество Ω_0. Тогда существует такая константа C, что для любой неотрицательной p-гармонической функции u выполняется неравенство*

$$\max_{X\in\omega} u(X) \leq C\min_{X\in\omega} u(X).$$

Для рассматриваемого случая обосновать неравенство для p-гармонических функций, опираясь только на теорему о среднем, как это делается в классическом случае, нельзя. Главным препятствием служит ограничение на радиус рассматриваемых шаров. Этот радиус должен быть достаточно мал, если центр шара лежит вблизи стратов размерности, меньшей 2. Поэтому мы сначала сформулируем сферический аналог неравенства Харнака.

Теорема. *Пусть u-неотрицательная на Ω_0 p-гармоническая функция и $B(\xi,R)\subset\Omega_0$-правильный шар. $\xi\in\sigma_{2i}$ или $\xi\in\sigma_{1i}$. Тогда при $\rho < R, \rho = |X-\xi|$ и некоторых независящих от u констант C_1 и C_2, имеем*

$$C_1\frac{(R-\rho)}{(R+\rho)}u(\xi) \leq u(X) \leq C_2\frac{(R+\rho)}{(R-\rho)}u(\xi). \tag{13}$$

Доказательство. Подробное доказательство для случая $\mathbb{R}^n$ приведено в [2]. Поэтому докажем общее неравенство. Докажем сначала общее неравенство не на всем множестве Ω, а на его подмножестве, которое строится специальным образом. Для этого введем в рассмотрение множество ω_0^ϵ-это покрытие стратов размерности не 0 шарами радиуса ϵ, центры шаров лежат на стратах соответствующей размерности.

Рассмотрим теперь не все множество, а $\omega \backslash \omega_0^\epsilon$. На рассматриваемом множестве для любого простого шара будет выполняться сферический вариант неравенства Харнака. Тогда, покрыв его простыми шарами, мы получим, что любые две точки множества можно соеденить цепочкой шаров, для которых справедливо сферическое неравенство. То есть для любых двух точек X, Y можно построить следующую цепочку неравенств

$$u(X) \leq C_{21}\frac{(R-\rho)}{(R+\rho)}u(\xi) \leq u(\xi_1) \leq C_{21}\frac{(R-\rho)}{(R+\rho)}u(\xi_2) \leq ...C_{q1}\frac{(R-\rho)}{(R+\rho)}u(Y).$$

Таким образом, существует константа C, что будет выполнено неравенство Харнака.

Теперь покажем, что и для всего множества ω будет выполняться это же неравенство. Для любого шара из покрытия ω_0^ϵ будет выполнена теорема о среднем. И, как следствие из нее, будет выполняться принцип максимума.

Таким образом, максимум и минимум на $\omega \setminus \omega_1^\epsilon$ будет совпадать с макимумом и минимумом на ω, и неравенство будет выполняться и для всего множества с той же константой. □

Прямым следствием формулы Пуассона и неравенства Харнака является теорема Харнака о равномерной сходимости:

Теорема. *Если неубывающая или невозрастающая последовательность гармонических функций в области Ω сходится в некоторой точке множества Ω, то она сходится во всех точках Ω и сходимость равномерна в любой замкнутой внутренней подобласти, к функции, гармонической в Ω.*

Выводы

Теперь мы можем перейти к реализации метода Пуанкаре-Перрона. Для этого введем класс так называемых нижних функций.

Определение. Определим множество $\sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ множество нижних функций, как множество p-субгармонических функций ($\sigma(\Omega_0)$), не превосходящих на границе заданной функции φ.

$$\sigma_\varphi(\overline{\Omega_0}) = \{u : u \in C^\circ(\Omega) \cap \sigma(\Omega_0),\ u \leqslant \varphi, |\ \partial\Omega_0\} \tag{14}$$

Определение. Функцию $W_\varphi(x)$ определим следующим образом

$$W_\varphi(x) = \sup_{u \in \sigma_\varphi(\Omega_0)} u(x), \quad x \in \Omega_0 \tag{15}$$

и будем называть ее верхнеогибающей.

Основной результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. *Пусть граница множества Ω_0 является регулярной. Тогда функция u, определенная в $\overline{\Omega_0}$ и равная*

$$W_\varphi(x) = \sup_{u \in \sigma_\varphi(\Omega_0)} u(x)$$

является искомым решением задачи Дирихле.

Для доказательства теоремы нам необходимо доказать, что

1) $W_\varphi(x)$-p-гармоническая функция;

2) $W_\varphi(x)$ удовлетворяет граничным условиям.

Приведенная ниже схема доказательства ничем не отличается от классического случая и более подробно ее можно посмотреть, например, в [2] . Докажем сначала p-гармоничность. Заметим, что максимум конечного числа p-субгармонических функций является p-субгармонической функцией. Тогда мы можем построить последовательность

v_n p-субгармонических функций, сходящихся к u на плотном множестве в некотором шаре. Эту последовательность можно считать равномерно ограниченной. Из v_n мы можем построить последовательность $M_B[v_n]$ p-гармонических функций в шаре $B(\xi, R)$, которые на границе совпадают с v_n . Таким образом $M_B[v_n]$- неубывающая последовательность p-гармонических функций, сходящаяся на плотном множестве. Тогда из теоремы Харнака следует, что можно выделить равномерно сходящуюся последовательность, которая сходится к p-гармонической функции. Граничным условиям $W_\varphi(x)$ удовлетворяет в силу условия регулярности.

Список литературы

[1] Беседина С.В. *Неравенство Харнака для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве.*//Вестник ВГУ.Физика.Математика. 2004. – №1. – С.77-81.

[2] Курант Р. *Уравнения с частными производными.* М.:Мир – 1964. – 830 с.

[3] Пенкин О.М. *О принципе максимума для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве.* // Дифференц. уравн., – 1998.-Т.34,№10.– с.1433-1434.

[4] Покорный Ю.В. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах* // М.: Физматлит – 2004.–272 с.

[5] F.John. *Partial Differential Eqation.* // Springer Verlag – 1986. –250 P.

Воронежский государственный университет
Университетская площадь, 1, 394000, Воронеж, Россия
E-mail: besedina_sv@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.92 MSC2000: 34E15, 34E20, 47E05

В.А. Болилый

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Введение

Теория сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (СВДУ) с точками поворота начала свое современное развитие с работ Р. Лангера (см. [1, 2, 3, 4]). Значительное количество научных работ посвящено исследованию уравнениям Лиувилля и Орра-Зоммерфельда [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12]. Характерной чертой этих уравнений, является то, что они содержат производные только четных порядков. Благодаря такому расположению производных, для нахождения асимптотики решения этих уравнений использовался аппарат функций Эйри.

Если же уравнение содержит производные как четных, так и нечетных порядков, то при исследовании таких уравнений уже возникают значительные трудности. Подтверждением этому, наверно, и является тот факт, что исследований СВДУ общего вида с точками поворота не так уж и много (см. [3, 5, 7, 8, 9, 10, 12]). Все эти работы относятся к исследованию скалярных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. В работах [9, 10]) рассматриваются СВДУ четвертого порядка с разными точками поворота, в них показано что при решении проблемы неалгебраической точки поворота для уравнения четвертого порядка возникают значительные трудности, которые не наблюдались в уравнениях Лиувилля, Орра-Зоммерфельда (только четные производные) и уравнении общего вида третьего порядка.

1. Постановка задачи

Цель данной работы состоит в построении равномерной асимптотики решения СВДУ вида

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \quad &\equiv \quad \varepsilon^6 y^{(4)}(x,\varepsilon)+\varepsilon^5 a_3(x)y'''(x,\varepsilon)+\varepsilon^3 a_2(x)y''(x,\varepsilon)+\\ &+\varepsilon^2 a_1(x)y(x,\varepsilon)+a_0(x)y(x,\varepsilon)=h(x), \qquad (1)\end{aligned}$$

при $\varepsilon \to +0$ и достаточной гладкости коэффициентов уравнения (1) при $x \in I = [-l;l]$, причем $a_1(x) = x\tilde{a}_1(x)$, $a_0 = x\tilde{a}_0(x)$. Для всех $x \in I = [-l;l]$ выполняется $\tilde{a}_1(x) \neq 0$, $\tilde{a}_1(x) \neq 0$.

2. Характеристическое уравнение

Для написания характеристического уравнения, соответствующего уравнению (1), используем методику описанную в [7, 8, 9, 10]. Для этого приведем однородное дифференциальное уравнение (1) к системе дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^2 W'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)W(x,\varepsilon) = 0$$

и запишем характеристическое уравнение $det(A(x,\varepsilon) - \tilde{\lambda}E) = 0$. В результате получим характеристическое уравнение

$$\tilde{f}(\lambda) \equiv \tilde{\lambda}^4 + \varepsilon a_3(x)\tilde{\lambda}^3 - \varepsilon a_2(x)\tilde{\lambda}^2 + \varepsilon^2 a_1(x)\tilde{\lambda} + \varepsilon^2 a_0(x) = 0. \qquad (2)$$

В полученном характеристическом уравнении малый параметр $\varepsilon > 0$ входит довольно сложно. К сожалению, нельзя перейти к использованию дополнительного характеристического уравнения, которое получается из уравнения (2) при $\varepsilon = 0$. Нельзя отбросить слагаемые $\varepsilon^2 a_0(x)$ и $\varepsilon^2 a_1(x)$, поскольку в этом случае получим один корень тождественно равный нулю.

Корни характеристического уравнения (2) полезно выразить через корни уравнения

$$f(k) \equiv k^4 + a_3(x)k^3 + a_2(x)k^2 + a_1(x)k + a_0(x) = 0, \tag{3}$$

явный вид которого уже легко написать исходя из вида исследуемого СВДУ (1). Это уравнение назовем *определяющим характеристическим уравнением* для СВДУ (1).

Пусть корни определяющего уравнения (3) удовлетворяют условиям

$$k_{1,2}(x) = \pm i\sqrt{x\tilde{k}(x)}, \qquad k_i(x) \neq 0, \quad i = 3,4, \quad \tilde{k}(x) > 0, \quad x \in I. \tag{4}$$

Из условий (4) следует, что СВДУ (1) содержит классическую точку поворота $x = 0$, причем одновременно $a_0(0) = a_1(0) = 0$.

С учетом (4), характеристическое уравнение (2) можно записать в виде

$$[\lambda^2(x,\varepsilon) + \varepsilon k_1(x)k_2(x)][\lambda^2(x,\varepsilon) - \varepsilon[k_1(x) + k_2(x)]\lambda(x,\varepsilon) + \varepsilon k_3(x)k_4(x)] = 0.$$

Тогда корнями характеристического уравнения (2) будут

$$\lambda_{1,2}(x,\varepsilon) = \pm i\sqrt{\varepsilon k_1(x)k_2(x)} \equiv \pm i\sqrt{\varepsilon x\tilde{k}(x)},$$

$$\lambda_{3,4}(x,\varepsilon) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\left[\sqrt{\varepsilon}[k_1(x) + k_2(x)] \pm i\sqrt{4k_3(x)k_4(x) - \varepsilon[k_3(x) + k_4(x)]^2}\right]. \tag{5}$$

Есть смысл обратить внимание на частный случай, когда $k_3(x) = -k_4(x)$. Тогда СВДУ (1) вырождается в уравнение типа Орра-Зоммерфельда

$$\varepsilon^6 U^{(4)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 a_2(x)U''(x,\varepsilon) + a_0(x)U(x,\varepsilon) = 0. \tag{6}$$

Определяющее характеристическое уравнение для уравнения (6) имеет вид

$$k^4(x) + a_2(x)k^2(x) + a_0(x) = 0. \tag{7}$$

Пусть корнями этого уравнения будут

$$k_{1,2}(x) = \pm\sqrt{x\tilde{k}(x)}, \quad k_3(x) = -k_4(x) \neq 0. \tag{8}$$

Легко проверить, что в этом случае формулы (7) и (8) являются частными результатами соответственно формул (3) и (5). Следовательно, все результаты, полученные в настоящей работе для случая псевдодифференциальной точки поворота, содержат в себе, как частный случай, результаты, полученные для уравнения (6), т. е. для СВДУ с алгебраической точкой поворота.

3. Расширение задачи

Наряду с независимой переменной $x \in I$, введем дополнительную вектор-переменную $t = \{t_2, t_3, t_4\}$, компоненты которой определим в виде

$$t_1 \equiv t_2 = \frac{\varphi_2(x)}{\varepsilon} \equiv \Phi_2(x,\varepsilon), \quad t_i = \frac{\varphi_i(x)}{\varepsilon^{p_i}} \equiv \Phi_i(x,\varepsilon), \quad i = 3,4, \tag{9}$$

где показатели p_i и регуляризующие функции $\varphi_i(x)$ подлежат определению.

Для упрощения изложения сразу определим регуляризующую функцию $\varphi_2(x)$, соответствующую точке поворота, т.е. нестабильным элементам $k_1(x)$, $k_2(x)$, как решение задачи

$$\varphi_2'^2(x)\varphi_2(x) = x\tilde{k}(x), \quad \varphi_2(0) = 0, \tag{10}$$

то есть

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\int\limits_0^x \sqrt{-x\tilde{k}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}, & \text{когда} \quad x \in [-l;0], \\ -\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^x \sqrt{x\tilde{k}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}, & \text{когда} \quad x \in [0;l]. \end{cases}$$

Регуляризующая функция $\varphi_2(x)$ имеет свойства: $\varphi_2(x)$ принадлежит пространству $C^\infty[-l;l]$; $\varphi_2(x)$ монотонно убывает на всем отрезке $[-l,l]$; $\varphi_2(x)>0$ для всех $x\in I=[-l,0)$; для всех $x\in I=(0,l]$ $\varphi_2(x)<0$; в точке поворота $x=0$ функция $\varphi_2(0)=0$, а ее производная $\varphi_2'(0)=\sqrt[3]{\tilde{k}(0)}\neq 0$.

Определим полные производные $\dfrac{d^s y(x,\varepsilon)}{dx^s}\equiv\dfrac{d^s\tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{dx^s}$, $s=\overline{1,4}$ и подставим их значение в уравнение (1). Тогда для определения расширенной функции $\tilde{y}(x,t,\varepsilon)$ получим расширенное уравнение

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon\tilde{y}(x,t,\varepsilon)=h(x). \tag{11}$$

Расширенный оператор $\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon\equiv\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon 0}+\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon 2}+\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon 3}+\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon 4}+Y_\varepsilon^{\perp}. \tag{12}$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon 0}\equiv\varepsilon^6\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\varepsilon^5 a_3(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\varepsilon^3 a_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\varepsilon^2 a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}+a_0(x)\equiv\mathbf{L}_\varepsilon, \tag{13}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon 2}\equiv\varepsilon^2{\varphi_2'}^4(x)\frac{\partial^4}{\partial t_2^4}+\varepsilon^3 L_{43}\frac{\partial^3}{\partial t_2^3}+\varepsilon^4 L_{42}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}+\varepsilon^5 L_{41}\frac{\partial}{\partial t_2}+a_3(x)[\varepsilon^2{\varphi_2'}^3(x)\frac{\partial^3}{\partial t_2^3}+$$

$$+\varepsilon^3 L_{32}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}+\varepsilon^4 L_{31}\frac{\partial}{\partial t_2}]+a_2(x)[\varepsilon{\varphi_2'}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}+\varepsilon L_{21}\frac{\partial}{\partial t_2}]+a_1(x)\varepsilon\varphi_2'(x)\frac{\partial}{\partial t_2},$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon i}\equiv\varepsilon^{6-4p}{\varphi_i'}^4(x)\frac{\partial^4}{\partial {t_i}^4}+\sum_{s=0}^{2}\varepsilon^{6-(3-s)p}L_{4(3-s)}\frac{\partial^{3-s}}{\partial {t_i}^{3-s}}+a_3(x)[\varepsilon^{5-3p}{\varphi_i'}^3(x)\frac{\partial^3}{\partial {t_i}^3}+$$

$$+\varepsilon^{5-(3-s)p}L_{3(3-s)}\frac{\partial^{3-s}}{\partial t_i^{3-s}}]+a_2(x)\big[\varepsilon^{3-2p}{\varphi_i'}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}+\varepsilon^{3-p}L_{21}\frac{\partial}{\partial t_i}\big]+\varepsilon^{2-p}a_1(x)\varphi_i'(x)\frac{\partial}{\partial t_i}, \tag{14}$$

где $i=3,4$, а

$$\begin{aligned}
L_{21}&\equiv 2\varphi_i'(x)\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_i''(x),\quad L_{32}\equiv 3{\varphi_i'}^2(x)\frac{\partial}{\partial x}+3\varphi_i'(x)\varphi_i''(x),\\
L_{31}&\equiv 3\varphi_i'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3\varphi_i'(x)\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_i'''(x),\quad L_{43}\equiv 4\varphi_i'(x)\frac{\partial}{\partial x}+6\varphi_i''(x),\\
L_{41}&\equiv 4\varphi_i'(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6\varphi_i''(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+4\varphi_i'''(x)+{\varphi_i'}^4(x),\\
L_{42}&\equiv 6{\varphi_i'}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+12\varphi_i'(x)\varphi_i''(x)\frac{\partial}{\partial x}+4\varphi_i'(x)\varphi_i'''(x)+3{\varphi_i''}^2(x),
\end{aligned} \tag{15}$$

Легко проверить, что расширенный оператор, представленный формулами (12)-(14), удовлетворяет необходимому условию метода регуляризации, а именно

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon\tilde{y}(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)}=\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon),\qquad \Phi(x,\varepsilon)=\{\Phi_i(x,\varepsilon),i=\overline{2,4}\}.$$

4. Построение пространств безрезонансных решений

Рассмотрим множества функций

$$\begin{aligned}
Y_{ri}&=\big\{V_{ri}(x)U_i(t_2)+Q_{ri}(x)U_i'(t_2)\big\},\quad Y_{r(2+i)}=\big\{\alpha_{ri}(x)\exp t_i\big\},\quad i=1,2,\\
Y_{r5}&=\big\{f_r(x)\psi(t_2)+g_r(x)\psi'(t_2)\big\},\quad Y_{r6}=\big\{\omega_r(x)\big\},
\end{aligned} \tag{16}$$

где $V_{rk}(x)$, $Q_{rk}(x)$, $\alpha_r(x)$, $f_r(x)$, $g_r(x)$, $\omega_r(x)\in C^\infty[I]$, $U_k(t_2)$ – функции Эйри. Из подпространств (16) составим новые пространства

$$Y_r=\bigoplus_{i=1}^{6}Y_{ri}. \tag{17}$$

Элемент пространства безрезонансных решений (ПБР) (17) имеет вид

$$y_r(x,t)\;=\;\sum_{i=1}^{2}\Big[V_{ri}(x)U_i(t_2)+Q_{ri}(x)U_i'(t_2)\Big]+\sum_{i=3}^{4}\alpha_{ri}\exp t_i+$$

$$+f_r(x)\psi(t_2)+g_r(x)\psi'(t_2)+\omega_r(x)\equiv\sum_{i=1}^{5}y_{ri}(x,t)+\omega(x),$$

где $y_{ri}(x,t)\in Y_{ri}$, $i=\overline{1,5}$.

Учитывая (11)-(14), легко установить справедливость следующих тождеств:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon y_{ri}(x,t)&\equiv\Big(\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon2}+\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon0}\Big)\,y_{ri}(x,t_2),\quad i=1,2,\quad \tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon\omega_r(x)\equiv\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon0}\omega_r(x)\equiv\mathbf{L}_\varepsilon\omega_r(x),\\ \tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon y_{r(2+i)}(x,t)&\equiv\Big(\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon i}+\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon0}\Big)\,\alpha_{ri}(x)\exp t_{2+i},\quad i=1,2.\end{aligned}\tag{18}$$

Используя тождества (18), линейно независимые решения расширенного уравнения (11), а следовательно, и СВДУ (9) будем строить в соответствующих подпространствах Y_{ri}, $r=\overline{1,5}$.

5. Построение линейно независимых решений, соответствующих точке поворота

Два линейно независимых решения расширенного уравнения (11), соответствующие точке поворота, строим в виде рядов (i=1,2)

$$Y_i(x,t,\varepsilon)\equiv Y_i(x,t_2,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\Big[V_{ri}(x)U_i(t_2)+Q_{ri}(x)U_i'(t_2)\Big]\equiv\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r y_{ri}(x,t_2).\tag{19}$$

Для определения коэффициентов $V_{ri}(x)$ и $Q_{ri}(x)$ подставим (19) в расширенное уравнение (11). С учетом первого тождества (18), а впоследствии и (13), получим

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon Y_i(x,t_2,\varepsilon)&\equiv\Big(\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon2}+\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon0}\Big)\,Y_i(x,t_2,\varepsilon)\equiv\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\Big[F_{ri}(V_{ri}(x),Q_{ri}(x),x,\varepsilon)\cdot U_i(t_2)+\\ &+M_{ri}(V_{ri}(x),Q_{ri}(x),x,\varepsilon)\cdot U_i'(t_2)\Big]=0.\end{aligned}\tag{20}$$

Здесь

$$\begin{aligned}F_{ri}(V_{ri}(x),Q_{ri}(x),x,\varepsilon)&\equiv\Big[\Big[{\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)\Big]^2-a_2(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)+a_0(x)\Big]\,V_{ri}(x)+\\ &+\varphi_2'(x)\varphi_2(x)\Big[a_3(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)-a_1(x)\Big]Q_{ri}(x)+\varepsilon\Big[4{\varphi_2'}^4(x)\varphi_2(x)+\varphi_2^2(x)L_{43}-\\ &-a_2(x){\varphi_2'}^2(x)-\varphi_2(x)L_{21}\Big]Q_{ri}(x)+\varepsilon^2\Big[-a_3(x){\varphi_2'}^3(x)-a_3(x)\varphi_2(x)L_{32}+a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big]V_{ri}(x)+\\ &+\varepsilon^3\Big\{\Big[-L_{43}-\varphi_2(x)L_{42}+a_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]V_{ri}(x)-a_3(x)\Big[L_{32}+\varphi_2(x)L_{31}\Big]Q_{ri}(x)\Big\}-\\ &-\varepsilon^4\Big[L_{42}+\varphi_2(x)L_{41}\Big]Q_{ri}(x)+\varepsilon^5a_3(x)V_{ri}'''(x)+\varepsilon^6V_{ri}^{(4)}(x),\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}M_{ri}(V_{ri}(x),Q_{ri}(x),x,\varepsilon)&\equiv\Big[\Big[{\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)\Big]^2-a_2(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)+a_0(x)\Big]\,Q_{ri}(x)+\\ &+\varepsilon\varphi_2'(x)\Big[a_1(x)-a_3(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)\Big]V_{ri}(x)+\varepsilon^2\Big\{a_1(x)Q_{ri}'(x)+a_2(x)L_{21}V_{ri}(x)-\\ &-a_3(x)\Big[2{\varphi_2'}^3(x)+\varphi_2(x)L_{32}\Big]Q_{ri}(x)-\Big[\varphi_2L_{43}+2{\varphi_2'}^4(x)V_{ri}(x)\Big\}+\\ &+\varepsilon^3\Big[a_2(x)Q_{ri}'''(x)-2L_{43}Q_{ri}(x)-\varphi_2(x)L_{42}Q_{ri}(x)\Big]+\varepsilon^5L_{41}V_{ri}(x)+\varepsilon^6Q_{ri}^{(4)}(x).\end{aligned}\tag{22}$$

Поскольку $U_i(t_2)$ и $U_i'(t_2)$ линейно независимы, то из (20) получим два равенства

$$F_{ri}(V_{ri}(x),Q_{ri}(x),x,\varepsilon)=0,\qquad M_{ri}(V_{ri}(x),Q_{ri}(x),x,\varepsilon)=0.\tag{23}$$

Сразу заметим следующее: функции $V_{0i}(x)$ не могут совпадать с $Q_{0i}(x)$, ибо в случае их совпадения мы не сможем одновременно удовлетворить оба равенства (23).

Чтобы в первом равенстве (23) не содержались коэффициенты при ε^0, мы должны потребовать, чтобы имели место равенства

$$\Big[{\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)\Big]^2-a_2(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)+a_0(x)=0.\tag{24}$$

$$a_3(x){\varphi'_2}^2(x)\varphi_2(x) - a_1(x) = 0. \tag{25}$$

На первый взгляд мы получили разные два уравнения для определения одной и той же регуляризующей функции $\varphi_2(x)$. Однако проведем более детальное исследование этих равенств. Для этой цели распишем коэффициенты $a_i(x)$ через корни определяющего характеристического уравнения (3). Имеем

$$\left[{\varphi'_2}^2(x)\varphi_2(x)\right]^2 - [x\tilde{k}(x) + k_3(x)k_4(x)]\varphi_2(x)\varphi'_2(x) + x\tilde{k}(x)k_3(x)k_4(x) = 0. \tag{26}$$

$$-\bigl(k_3(x) + k_4(x)\bigr){\varphi'_2}^2(x)\varphi_2(x) + x\tilde{k}(x)[k_3(x) + k_4(x)] = 0. \tag{27}$$

Из уравнения (27) получим дифференциальное уравнение (10) для определения регуляризующей функции $\varphi_2(x)$, которое мы записали с самого начала.

Легко проверить, что определенная таким образом регуляризующая функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяет и уравнению (26).

Следующим этапом будет получение дифференциальных уравнений, из которых можно будет определить достаточно гладкие функции $Q_{ri}(x)$. Для этого приравняем к нулю коэффициенты при ε в первом равенстве (23). Учитывая явный вид операторов L_{43} и L_{21} (см. (15)), получим дифференциальные уравнения

$$A_Q(x)Q'_{0i}(x) + B_Q(x)Q_{0i}(x) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{28}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_Q(x) &= \varphi_2(x)\varphi'_2(x)[4a_2(x)\varphi_2(x) - 2] \equiv \\
&\equiv x\tilde{k}(x)[\varphi'_2(x)]^{-1}[4a_2(x)\varphi_2(x) - 2] \equiv x\tilde{A}_Q(x), \\
B_Q(x) &= 4{\varphi'_2}^4(x)\varphi_2(x) + 6\varphi_2^2(x)\varphi''_2(x) - a_2(x)\left[{\varphi'_2}^2(x) + \varphi_2(x)\varphi''_2(x)\right] \equiv \\
&\equiv 4{\varphi'_2}^4(x)\varphi_2(x) + 6\varphi_2^2(x)\varphi''_2(x) - \bigl(x\tilde{k}(x) + k_3(x)k_4(x)\bigr)\left[{\varphi'_2}^2(x) + \varphi_2(x)\varphi''_2(x)\right].
\end{aligned} \tag{29}$$

Из (29) видно, что $A_Q(0) = 0$, а $B_Q(0) = -k_3(0)k_4(0){\varphi'_2}^2(0) \neq 0$.

Следовательно, точка $x = 0$ является регулярной особой точкой для дифференциального уравнения (28). Поскольку $B_Q(0) \neq 0$, то для получения достаточно гладкого решения дифференциального уравнения (28) на всем отрезке I, включая и точку поворота $x = 0$, мы должны взять $Q_{0i}(0) = 0$. Поэтому решениями однородных уравнений (28) при однородных начальных условиях будут функции $Q_{0i}(x) \equiv 0$, $i = 1, 2$.

При $r \geq 1$ из первого равенства (23) получим неоднородные дифференциальные уравнение

$$A_Q(x)Q'_{ri}(x) + B_Q(x)Q_{ri}(x) = P^Q_{ri}(x), \quad i = 1, 2, \tag{30}$$

где $P^Q_{ri}(x) \equiv P^Q_{ri}\bigl(x, V_{(r-1)i}(x), V_{(r-2)i}(x)V_{(r-4)i}(x), V_{(r-5)i}(x), Q_{(r-2)i}(x), Q_{(r-3)i}(x)\bigr)$ – известные достаточно гладкие функции.

Пусть $\rho = \frac{-B_Q(0)}{2\tilde{A}_Q(0)} = \frac{-k_3(0)k_4(0)}{2} \neq 0$. Тогда можно утверждать, что существуют достаточно гладкие частные решения этих уравнений на всем отрезке I, включая и точку поворота $x = 0$, т.е. $Q_{ri}(x) \in C^\infty[0, l]$.

Приступим к исследованию второго равенства (23). Как уже было сказано, регуляризующая функция $\varphi_2(x)$ обращает в нуль коэффициенты при ε^0 и ε^1 (см. (24), (25)). Приравняем к нулю коэффициенты при ε^2. Тогда учитывая явный вид операторов L_{21}, L_{32}, получим дифференциальные уравнения

$$A_V(x)V'_{0i}(x) + B_V(x)V_{0i}(x) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned}
A_V(x) &\equiv 2a_2(x)\varphi'_2(x) - 4\varphi_2(x)\varphi'_2(x) \equiv 2k_3(x)k_4(x)\varphi'_2(x) + 2\varphi'_2(x)[x\tilde{k}(x) - 2\varphi_2(x)], \\
B_V(x) &\equiv a_2(x)\varphi''_2(x) - 6\varphi_2(x)\varphi''_2(x) - 2{\varphi'_2}^4(x),
\end{aligned}$$

Поскольку $A_V(0) = 2\varphi'_2(0)k_3(0)k_4(0) \neq 0$, то существуют достаточно гладкие общие решения $V_{ri}(x) \in C^\infty[0, l]$ дифференциальных уравнений (31) на всем отрезке I, включая и точку поворота $x = 0$, содержащие произвольные постоянные интегрирования.

В дальнейшем мы получим неоднородные дифференциальные уравнения

$$A_V(x)V'_{ri}(x) + B_V(x)V_{ri}(x) = P^V_{ri}(x), \quad i = 1, 2, \quad r \geq 1, \tag{32}$$

где $P^V_{ri}(x) \equiv P^V_{ri}\big(x, Q_{ri}(x), Q_{(r-1)i}(x), V_{(r-3)i}(x), Q_{(r-4)i}(x)\big)$ – известные достаточно гладкие функции при всех $x \in I$.

Вывод 1. При постепенном решении серии дифференциальных уравнений (28), (30), (31) и (32) будут определены функции $V_{ri}(x)$ и $Q_{ri}(x)$, а следовательно будут построены два линейно независимые решения расширенного уравнения (11), которые представимы в виде рядов (19), причем $Q_{0i}(x) \equiv 0$.

6. Построение линейно независимых решений, соответствующих стабильным корням

Следующие два линейно независимые решения СВДУ (1), соответствующие стабильным корням $\lambda_3(x)$ и $\lambda_4(x)$ (см. (5)), построим с использованием теоремы Шлезингера-Биркгоффа. К сожалению, для этой цели нельзя использовать корни $k_i(x)$, $i = 3, 4$, как это было в классическом случае теоремы Шлезингера-Биркгоффа.

Проведенные исследования показали, что эти решения можно строить в виде

$$\begin{aligned} Y_i(x, t_i, \varepsilon) &= \alpha_i(x, \varepsilon) \exp t_i \equiv \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \alpha_{ir}(x, t) \exp t_i, \\ t_i &= \varepsilon^{-2} \int\limits_0^x \lambda_i(\tau) d\tau \equiv \varepsilon^{-2} \varphi_i(x), \end{aligned} \tag{33}$$

где $\alpha_i(x, \varepsilon)$ – функции, подлежащие определению (i=3,4).

Подставим (33) в расширенное однородное уравнение (11). Получим

$$\mathbf{L}_\varepsilon Y_i(x, t_i, \varepsilon) \equiv \exp t_i \big\{ \varepsilon^{-2} \tilde{f}(\lambda_i)\alpha_i(x, \varepsilon) + \mathbf{D}\alpha_i(x, \varepsilon) + \varepsilon a_3(x)[3\lambda^2(x, \varepsilon)\alpha'_i(x, \varepsilon) +$$
$$+ 3\lambda(x, \varepsilon)\lambda'(x, \varepsilon)]\alpha_i(x, \varepsilon) + \varepsilon a_2(x)[2\lambda(x, \varepsilon)\alpha'_i(x, \varepsilon) + \lambda'(x, \varepsilon) Z_i(x, \varepsilon)] + O(\varepsilon^2) \big\}.$$

Здесь

$$\mathbf{D}\alpha_i(x, \varepsilon) \equiv 4\lambda^3(x, \varepsilon)\alpha'_i(x, \varepsilon) + 3\lambda^2(x, \varepsilon)\lambda'(x, \varepsilon)\alpha_i(x, \varepsilon).$$

Для определения коэффициентов ряда (33) получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений ($i = 3, 4$)

$$\begin{gathered} \mathbf{D}\alpha_{i0}(x) = 0, \quad \mathbf{D}\alpha_{ir}(x) = \beta_{ir}(x), \quad r \geq 2, \\ \mathbf{D}\alpha_{i1}(x) = -a_3(x)[3\lambda^2(x, \varepsilon)\alpha'_{i0}(x, \varepsilon) + 3\lambda(x, \varepsilon)\lambda'(x, \varepsilon)] Z_{i0}(x) \equiv \beta_{1i}(x), \end{gathered} \tag{34}$$

где $\beta_{ir}(x)$ – известные, достаточно гладкие функции при всех $x \in [0, l]$.

Поскольку $\lambda_i(x, \varepsilon) \neq 0$ для всех $x \in [0, l]$, то существуют достаточно гладкие решения дифференциальных уравнений (34) при всех $x \in [0, l]$.

Подставляя найденные решения дифференциальных уравнений (34) в ряд (33), получим третье и четвертое линейно независимые решения расширенного дифференциального уравнения (11) вида

$$Y_i(x, t_i, \varepsilon) = \exp t_i \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \alpha_{ir}(x, t), \quad i = 3, 4. \tag{35}$$

7. Построение частного решения неоднородного уравнения

Поскольку $a_0(0) = 0$, то для построения частного решения СВДУ (1) нельзя в явном виде использовать решение вырожденного уравнения $a_0(x)\omega(x) = h(x)$. Однако, для достижения этой цели можно применить методику построения частного решения СВДУ (1), разработанную в [7]. Таким образом частное решение СВДУ (1) строим в виде ряда

$$Y_{\text{част.}}(x, t_2, \varepsilon) = \sum_{r=-3}^{+\infty} \varepsilon^r \Big[f_r(x)\Psi(t_2) + g_r(x)\Psi'(t_2) + \omega_r(x) \Big], \tag{36}$$

где $f_r(x), g_r(x), \omega_r(x) \equiv$ – функции, подлежащие определению.

Подставим (36) в расширенное неоднородное уравнение (11). Тогда по аналогии с (20), получим равенство

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon Y_{\text{част.}}(x,t_2,\varepsilon) \equiv \left(\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon 2}+\tilde{\mathbf{L}}_{\varepsilon 0}\right) Y_{\text{част.}}(x,t_2,\varepsilon) \equiv \sum_{r=-3}^{+\infty} \varepsilon^r \Big[F_{ri}(f_r(x),g_r(x),x,\varepsilon)\cdot\Psi(t_2)+$$

$$+M_{ri}(f_r(x),g_r(x),x,\varepsilon)\cdot\Psi'(t_2)\Big]+\varepsilon^2\varphi'(x)a_1(x)g_r(x)+\varepsilon^3 a_2(x)\varphi'^2(x)f_r(x)-$$

$$-\varepsilon^4\varphi'^3(x)\varphi_2(x)a_3(x)g_r(x)-\varepsilon^5\varphi'^4(x)\varphi_2(x)f_r(x)-3\varepsilon^6\varphi'^4(x)g_r(x)\Big]=h(x).$$

Используя тождества (21) и (22), мы можем легко выписать явный вид функций $F_{ri}(f_r(x),g_r(x),x,\varepsilon)$ и $M_{ri}(f_r(x),g_r(x),x,\varepsilon)$. Приравняем коэффициенты при линейно независимых СОМ и единице. По аналогии с (23), получим три независимые один от другого уравнения

$$F_{ri}(f_r(x),g_r(x),x,\varepsilon)=0, \qquad M_{ri}(f_r(x),g_r(x),x,\varepsilon)=0,$$

$$\mathbf{L}_\varepsilon\omega(x,\varepsilon)=h(x)-\Big[\varepsilon^2\varphi'(x)a_1(x)g_r(x)+\varepsilon^3\varphi'^2(x)a_2(x)f_r(x)-$$

$$-\varepsilon^4\varphi'^3(x)\varphi_2(x)a_3(x)g_r(x)-\varepsilon^5\varphi'^4(x)\varphi_2(x)f_r(x)-3\varepsilon^6\varphi'^4(x)g_r(x)\Big].$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим три системы рекуррентных дифференциальных уравнений вида (см. (30), (32))

$$\begin{array}{rcl} A_Q(x)g'_{ri}(x)+B_Q(x)g_{ri}(x) &=& P_r^g(x), \\ A_V(x)f'_r(x)+B_V(x)f_r(x) &=& P_r^f(x), \quad r\ge -3, \end{array} \tag{37}$$

$$\begin{array}{rcl} a_0(x)\omega_r(x) &=& 0, \quad r=\overline{-3,-1}; \\ a_0(x)\omega_0(x) &=& h(x)-\varphi'^2(x)a_2(x)f_{(-3)}(x)-\varphi'(x)a_1(x)g_{(-2)}(x), \\ a_0(x)\omega_r(x) &=& P_r^\omega(x), \quad r\ge 1, \end{array} \tag{38}$$

где $P_r^g(x)$, $P_r^f(x)$, $P_r^\omega(x)$, - известные, достаточно гладкие функции. Здесь учтено,что $g_{(-3)}(x)\equiv 0$.

Таким образом однозначно будут определены функции $g_r(x), f_r(x)\in C^\infty[0,l]$, причем $f_r(x)$ будут определены с точностью до произвольных постоянных f_r^0.

Приступим к построению достаточно гладких решений серии алгебраических уравнений (38). В пространстве $C^\infty[0,l]$ решениями первых двух уравнений будут тождественные нули. За счет точечной произвольности функции $f_{(-3)}(x)$ потребуем, чтобы точка $x=0$ была нулём правой части уравнения (38) при $r=0$. Для этого необходимо задать начальное условие $f_{(-3)}(0)=[\varphi'^2(0)a_2(0)]^{-1}\cdot h(0)$.

При таком задании начального условия: 1) будет однозначно определена функция $f_{(-3)}(x)$; 2) существует достаточно гладкое на всем отрезке $[0,l]$ решение

$$\omega_0(x)=a_0^{-1}(x)[h(x)-\varphi'(x)a_1(x)g_{-2}(x)-\varphi'^2(x)a_2(x)f_{(-3)}(x)].$$

Продолжая далее строить решения алгебраических уравнений (38) в пространстве $C^\infty[0,l]$ с использованием точечной произвольности функций $f_r(x)$, мы однозначно определим все эти функции, как решения дифференциальных уравнений (37) при соответствующих начальных условиях, и получим достаточно гладкие решения $\omega_r(x)$.

Подставив однозначно определенные функции в ряд (36), будет однозначно определено частое решения расширенного уравнения (11) в виде ряда

$$Y_{\text{част.}}(x,t_2,\varepsilon)=\varepsilon^{-3}f_{(-3)}(x)\Psi(t_2)+\sum_{r=-2}^{+\infty}\varepsilon^r\Big[f_r(x)\Psi(t_2)+g_r(x)\Psi'(t_2)+\omega_r(x,t_2)\Big]. \tag{39}$$

8. Оценка остаточных членов

Запишем построенные решения (19), (35) и (39) в виде

$$Y_k(x,t,\varepsilon) = Y_{Pk}(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{P+1}\xi_{k(P+1)}(x,t,\varepsilon), \quad k = \overline{1,5}, \tag{40}$$

где $Y_{Pk}(x,t,\varepsilon) = \sum\limits_{r=0}^{P} \varepsilon^r Y_{rk}(x,t)$, – частичные суммы, а $\varepsilon^{P+1}\xi_{k(P+1)}(x,t,\varepsilon)$– остаточные члены соответствующих рядов, а $Y_5(x,t,\varepsilon) \equiv Y_{\text{част.}}(x,t_2,\varepsilon)$.

По аналогии с [7] для остаточных членов решений (40) получим оценки

$$\begin{aligned} \|\xi_{k(P+1)}(x,t,\varepsilon)\| &\le A_{(P+1)}\varepsilon^{\frac{-1}{4}}, \quad k = 1,2, \quad P \ge 1, \\ \|\xi_{k(P+1)}(x,t,\varepsilon)\| &\le A_{(P+1)}, \quad k = 3,4,5, \quad P \ge 0, \end{aligned} \tag{41}$$

где постоянная $\mathrm{A}_{(P+1)}$ не зависит от $x \in [0,1]$ и малого параметра $\varepsilon > 0$.

При $P = 0$ получим улучшенные оценки, а именно:

$$\|\xi_{k1}(x,t,\varepsilon)\| \le A_1, \quad k = \overline{1,5}. \tag{42}$$

Проведем сужение при $t = \Phi(x,\varepsilon)$ в построенных решениях и соответствующих оценках.

Тогда получим следующие формулы

$$Y_k(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{r=0}^{P} \varepsilon^r Y_{rk}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon^{P+1}\xi_{k(P+1)}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon), \quad k = \overline{1,5}, \tag{43}$$

и оценки

$$\begin{aligned} \|\xi_{k(P+1)}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\| &\le \mathrm{A}_{P+1}\varepsilon^{\frac{-1}{4}}, \quad P \ge 1, \quad k = 1,2, \\ \|\xi_{k(P+1)}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\| &\le \mathrm{A}_{P+1}, k = 3,4,5, \quad P \ge 0, \\ \|\xi_{k1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\| &\le \mathrm{A}_1, \quad k = \overline{1,5}, \quad P \ge 0, \end{aligned} \tag{44}$$

где постоянные A_{P+1} и A_1 не зависят от $x \in [0;1]$ и малого параметра $\varepsilon > 0$.

Выводы

Сформулируем в виде теоремы полученные результаты.

Теорема. *Пусть для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения (1) имеют место условия:*

а) $a_i(x) \in C^\infty[0,l], \quad i = \overline{0,3}$;

б) *корни определяющего характеристического уравнения (3) удовлетворяют условиям (4).*

Тогда при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$*:*

(1) *в пространстве* $C^\infty[0,l]$ *вышеописанным методом можно построить четыре линейно независимые и частное решения расширенного уравнения (11), представимые в виде формул (19), (35), (39);*

(2) *сужение этих решений при* $t = \Phi(x,\varepsilon)$*, т.е. решения (43) являются асимптотическими решениями однородного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения (1) ;*

(3) *для остаточных членов асимптотических рядов решений имеют место оценки* (41), (42), (44).

Список литературы

[1] Langer R.E. The asymptotic solutions of certain ordinary differential equations of the second order, with special reference to a turning point // Transactions of the American Mathematical Socity. – 67(1949). – p. 461-490.

[2] Langer R.E. On the asymptotic forms of ordinary linear differential equations of the third order in a region containg a turning point // Transactions of the American Mathematical Socity. – 80(1955). – p. 93-123.

[3] Langer R.E. The solutions of a class of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a multiple turning point // Duke Math. J. – 23(1956). – p. 93-110.

[4] Langer R.E. Formal solutions and a related equation for a class of fourh order differential eqwuations of a hydrodynamic type // Transactions of the American Mathematical Socity. – 92(1959). – p. 371-410.
[5] Nishimoto T. On the Orr-Sommerfeld type equations, II; Connection formulas // Kódai Math. Sem. Rep. – 29(1978). – p. 233-249.
[6] Wasow W.R. Linear turning point theory. - New York: Springer-Verlag Inc. - 1985. - 243 p.
[7] Бобочко В.Н., Болилый В.А. Псевдодифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений // Нелінійні коливання. – 1999. – Т. 2., №2. – С. 170-177.
[8] Бобочко В.Н., Болилый В.А. Особенности интегрирования линейных дифференциальных уравнений общего вида с точками поворота // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сб. науч. тр. Ин-т математики НАН Украины. Киев, 1999. – С. 43-47.
[9] Бобочко В.М., Болілий В.О. Внутрішня псевдодиференціальна точка звороту в диференціальному рівнянні типу Орра-Зоммерфельда // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – Київ, 2002. – вип. № 1. – С. 89-96.
[10] Бобочко В.М., Болілий В.О. Псевдодиференціальна точка звороту в диференціальному рівнянні четвертого порядку // Вісник Київського університету. Математика та механіка, 2002. – Вип. 7-8. – С. 5-9.
[11] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука - 1981. - 400 с.
[12] Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 11. – С. 1505-1516.

Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко
ул. Шевченко, 1, 25000, Кировоград, Украина
E-mail: basilb@mail.ru, basilb@kspu.kr.ua

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.983.53 MSC2000: 47A06, 47A010, 34B05

В.М. Брук

ОБОБЩЕННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Введение

В статье А.В. Штрауса [1] получена формула обобщенных резольвент минимального оператора, порожденного формально самосопряженным дифференциальным выражением. Эти результаты перенесены в [2] на дифференциально-операторные выражения гиперболического типа. В этих работах обобщенная резольвента порождалась самосопряженным расширением с выходом в гильбертово пространство.

При наличии операторного веса дифференциальное выражение порождает максимальное линейное отношение, которое, вообще говоря, не является оператором. Область определения этого отношения может содержать элементы, не являющиеся функциями со значениям в исходном пространстве. Поэтому формула Лагранжа, используемая при построении формулы обобщенных резольвент, справедлива не для всех упорядоченных пар, принадлежащих максимальному отношению.

В данной работе дается описание обобщенных резольвент минимального отношения, порожденного дифференциально-операторным выражением гиперболического типа и весовой неотрицательной операторной функцией. Обобщенные резольвенты могут порождаться самосопряженным расширением с выходом в пространство с индефинитной метрикой.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$; $A(t)$ – сильно измеримая на конечном отрезке $[0,b]$ операторная функция, значениями которой являются ограниченные неотрицательные операторы в H. Предполагается, что норма $\|A(t)\|$ суммируема на $[0,b]$. На множестве непрерывных на $[0,b]$ функций со значениями в H введем скалярное произведение $\langle y,z\rangle = \int_0^b (A(t)y(t),z(t))dt$. Отождествляя с нулем функции y, для которых $\langle y,y\rangle = 0$, и производя пополнение, получим гильбертово пространство, обозначаемое $\mathrm{B} = L_2(H,A(t);0,b)$. Элементами B являются классы функций, отождествленных по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{B}}$. Далее $\tilde{y}$ обозначает класс функций с представителем y. Про функцию y будем также говорить, что y принадлежит B.

Пусть $G_0(t)$ – множество таких элементов $x\in H$, что $A(t)x=0$; $H(t)=H\ominus G_0(t)$; $A_0(t)$ – сужение $A(t)$ на $H(t)$; $\{H_\xi(t)\}$ $(-\infty<\xi<\infty)$ – гильбертова шкала пространств, порожденная оператором $A_0^{-1}(t)$. Оператор $A_0(t)$ можно расширить по непрерывности до оператора $\tilde{A}_0(t)$, отображающего непрерывно и взаимно однозначно $H_{-\alpha}(t)$ на $H_{1-\alpha}(t)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$. Через $\tilde{A}(t)$ обозначим оператор, определенный на $H_{-\alpha}(t)\oplus G_0(t)$, равный $\tilde{A}_0(t)$ на $H_{-\alpha}(t)$ и нулю на $G_0(t)$. Оператор $\tilde{A}(t)$ является расширением $A(t)$. Пространство B состоит из классов функций с представителями вида $\tilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/2}(t)h(t)$, где $h(t)\in L_2(H;0,b)$ [3].

Рассмотрим на отрезке $[0,b]$ дифференциальное выражение $l[y]=y''+\mathcal{A}_1(t)y+q(t)y$, где операторные функции $\mathcal{A}_1(t)$, $q(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\mathcal{A}_1(t)$ – самосопряженные, равномерно по t полуограниченные снизу операторы в H, имеющие постоянную область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1(t)) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, на которой функция $\mathcal{A}_1(t)$ сильно непрерывно дифференцируема (далее без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A}_1(t) \geqslant E$, E – тождественный оператор);

2) $q(t)$ – замкнутые симметрические операторы с областью определения $\mathcal{D}(q(t)) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1^{1/2})$ такие, что при любом $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1^{1/2})$ функция $q(t)x$ сильно непрерывна. (Как известно [4, с. 231], из условий, наложенных на функцию $\mathcal{A}_1(t)$, вытекает, что операторы $\mathcal{A}_1^{\beta}(t)$ $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ имеют постоянную область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1^{\beta}(t)) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_1^{\beta})$).

Пусть $\{\hat{H}_\tau\}$ $(-1 \leqslant \tau \leqslant 1)$ – гильбертова шкала пространств, порожденная оператором $\mathcal{A}_1(t_0)$ $(t_0 \in [0,b])$. Шкала $\{\hat{H}_\tau\}$ не зависит от выбора точки t_0 в следующем смысле. Если $\{\hat{H}'_\tau\}$ – шкала, порожденная оператором $\mathcal{A}_1(t'_0)$ $(t'_0 \in [0,b])$, то множества $\hat{H}_\tau$ и $\hat{H}'_\tau$ совпадают, а нормы в них эквивалентны. Так как оператор $\mathcal{A}_1(t)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно $\hat{H}_{+1}$ на $\hat{H}_0 = H$, то сопряженный к $\mathcal{A}_1(t)$ оператор $\mathcal{A}_1^{+}(t)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно H на $\hat{H}_{-1}$ и является расширением $\mathcal{A}_1^{*}(t) = \mathcal{A}_1(t)$. Из условий 2) вытекает, что оператор $q(t)\colon \hat{H}_{1/2} \to H$ непрерывен. Поэтому сопряженный к $q(t)$ оператор $q^{+}(t) : H \to \hat{H}_{-1/2}$ непрерывен и является расширением $q^{*}(t) \supset q(t)$. Обозначим $l^{+}[y] = y'' + \mathcal{A}_1^{+}(t)y + q^{+}(t)y$.

В [2] установлено существование функций $U_1(t,s)$, $U_2(t,s)$ $(0 \leqslant t,s \leqslant b)$, имеющих следующие свойства (в [2] предполагалось, что $q(t)$ – ограниченные операторы в H, однако все рассуждения из [2] переносятся на рассматриваемый здесь случай). Значениями функции $U_1(t,s)$ $(U_2(t,s))$ являются операторы, непрерывно отображающие $\hat{H}_{1/2}$ в $\hat{H}_{1/2}$ и H в H (соответственно H в $\hat{H}_{1/2}$ и $\hat{H}_{-1/2}$ в H). При любом $x \in \hat{H}_{(2-i)/2}$ $(x \in \hat{H}_{(1-i)/2})$ функция $U_i(t,s)x$ $(i = 1,2)$: (а) сильно непрерывна по t, s в $\hat{H}_{1/2}$ (в H); (б) сильно дифференцируема по t в H (в $\hat{H}_{-1/2}$), и $(U_i(t,s)x)'_t$ сильно непрерывна по t, s в H (в $\hat{H}_{-1/2}$); (в) дважды сильно непрерывно дифференцируема по t в $\hat{H}_{-1/2}$ (в $\hat{H}_{-1}$ соответственно); (г) при любом s удовлетворяет уравнению $y'' + \mathcal{A}_1^{+}(t)y + q^{+}(t)y = 0$ и условиям $U_i^{(k-1)}(s,s)x = (-1)^{i+1}\delta_{ik}x$ (δ_{ik} – символ Кронекера, $i,k = 1,2$) [2, 5].

Функция $y(t) \in L_1(H;0,b)$ называется решением уравнения

$$y'' + \mathcal{A}_1^{+}(t)y + q^{+}(t)y = g(t), \quad g(t) \in L_1(H;0,b), \tag{1}$$

если $y(t)$ имеет сильную производную $y'(t)$ в $\hat{H}_{-1}$, абсолютно непрерывную в $\hat{H}_{-1}$, и удовлетворяет уравнению (1). Так же как в [6] доказывается, что задача Коши для уравнения (1) с начальными условиями $y(s) = c_1 \in H$, $y'(s) = -c_2 \in \hat{H}_{-1/2}$ имеет единственное решение. Это решение имеет вид

$$y(t) = U_1(t,s)c_1 + U_2(t,s)c_2 - \int_s^t U_2(t,\xi)g(\xi)d\xi. \tag{2}$$

Заметим, что функция $z(t) = \int_s^t U_2(t,\xi)g(\xi)d\xi$ сильно непрерывна в $\hat{H}_{1/2}$, имеет сильную производную $z'(t)$ в H, абсолютно непрерывную в $\hat{H}_{-1/2}$, и удовлетворяет уравнению (1). Тогда из [2, 5] следует, что если функция $y(t) \in L_2(H;0,b)$ является решением (1), то $y(t)$ сильно непрерывна в H, а $y'(t)$ сильно непрерывна в $\hat{H}_{-1/2}$.

Методом последовательных приближений доказывается, что интегральные уравнения

$$W_i(t,s,\lambda) = U_i(t,s) - \lambda \int_s^t U_2(t,\xi)A(\xi)W_i(\xi,s,\lambda)d\xi \quad (i = 1,2;\ \lambda \in \mathbb{C})$$

имеют решения: первое $(i = 1)$ – в классе сильно непрерывных по t, s операторных функций, значениями которых являются ограниченные операторы в H; второе $(i = 2)$ – в классе сильно непрерывных по t, s операторных функций, значениями которых являются ограниченные операторы, отображающие $\hat{H}_{-1/2}$ в H. При фиксированном λ функции $W_1(t,s,\lambda)$, $W_2(t,s,\lambda)$ обладают свойствами (а), (б), (в) функций $U_1(t,s)$, $U_2(t,s)$ соответственно. Кроме того, при фиксированном s функции $W_1(t,s,\lambda)c_1$ $(c_1 \in H)$,

$W_2(t,s,\lambda)c_2$ ($c_2\in\hat H_{-1/2}$) удовлетворяют уравнению

$$l^+[y]-\lambda A(t)y=y''+\mathcal{A}_1^+(t)y+q^+(t)y-\lambda A(t)y=0$$

и условиям: $W_1(s,s,\lambda)c_1=c_1$, $W_1'(s,s,\lambda)c_1=0$, $W_2(s,s,\lambda)c_2=0$, $W_2'(s,s,\lambda)c_2=-c_2$. При фиксированных t, s функции $W_1(t,s,\lambda)$, $W_2(t,s,\lambda)$ голоморфны.

Пусть $W(t,s,\lambda)=(W_1(t,s,\lambda),W_2(t,s,\lambda))$ – операторная однострочная матрица. Зафиксируем точку $s_0\in[0,b]$ и положим $W(t,\lambda)=W(t,s_0,\lambda)$. При фиксированных t, λ оператор $W(t,\lambda)$ непрерывно отображает $H\times\hat H_{-1/2}$ в H. Поэтому оператор $W^*(t,\lambda)$, сопряженный к $W(t,\lambda)$, непрерывно отображает H в $H\times\hat H_{1/2}$.

Для дифференцируемой функции y обозначим $\breve y=\mathrm{col}(y,-y')$. Если $z=(z_1,...,z_k)$– система дифференцируемых функций, то $\breve z$ – матрица с j-столбцом $\breve z_j$. Аналогичные обозначения используются для операторных функций. Далее J_0 обозначает матрицу второго порядка с первой строкой $(0,-E)$ и второй $(E,0)$. Так же как в [2] доказывается, что функция

$$y(t)=W(t,\lambda)c-W(t,\lambda)J_0\int\limits_{s_0}^{t}W^*(\xi,\bar\lambda)h(\xi)d\xi. \tag{3}$$

удовлетворяет условию $\breve y(s_0)=c\in H\times\hat H_{-1/2}$ и является решением уравнения

$$l^+[y]-\lambda A(t)y=h(t),\quad h(t)\in L_1(H;0,b). \tag{4}$$

В следующей лемме единственность решения доказывается так же как в [6].

Лемма 1. *Задача Коши с начальным условием $\breve y(s_0)=c\in H\times\hat H_{-1/2}$ для уравнения* (4) *имеет единственное решение. Это решение имеет вид* (3).

Замечание 3. Если функция $y(t)$ непрерывна в H, имеет в $\hat H_{-1}$ сильную производную, абсолютно непрерывную в $\hat H_{-1}$, и удовлетворяет уравнению (4), то $y'(t)$сильно непрерывна в $\hat H_{-1/2}$.

Замечание 4. Если $y(t)$ является решением (4) и $\breve y(t_0)\in\hat H_{+1/2}\times H$ хотя бы при одном $t_0\in[0,b]$, то $\breve y(t)\in\hat H_{+1/2}\times H$ при всех $t\in[0,b]$.

Доказательство этих замечаний вытекает из равенства (2), в котором $g(\xi)$ заменено на $\lambda A(\xi)y(\xi)+h(\xi)$, из замечания после (2) и из свойств $U_1(t,s)$, $U_2(t,s)$.

Следующая лемма с учетом замечаний 3, 4 доказывается так же как в [2].

Лемма 2. *Пусть функции y, z являются решениями уравнения* (4) *и $\breve y(t_0)\in\hat H_{+1/2}\times H$ хотя бы при одном $t_0\in[0,b]$. Тогда*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(l^+[y],z)dt-\int\limits_{\alpha}^{\beta}(y,l^+[z])dt=(J_0\breve y(t),\breve z(t))\,|_{\alpha}^{\beta}\quad(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant b). \tag{5}$$

2. Максимальное и минимальное отношения

Если $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ – банаховы пространства, то любое линейное многообразие $\mathrm{T}\subset\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2$ называется линейным отношением. Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в [7]. Далее используем обозначения: $\{\cdot,\cdot\}$ – упорядоченная пара; KerT – множество пар вида $\{z,0\}\in\mathrm{T}$; $\ker\mathrm{T}$ – множество элементов z таких, что $\{z,0\}\in\mathrm{T}$; $\mathcal{R}(\mathrm{T})$ – область значений отношения T.

Пусть D' – множество функций $y(t)\in\mathrm{B}$ со свойствами: a) $y(t)$ непрерывна на $[0,b]$ в H, сильно дифференцируема на $[0,b]$ в $\hat H_{-1}$ и $y'(t)$ абсолютно непрерывна в $\hat H_{-1}$; b) $l^+[y](t)\in H_{1/2}(t)$ при почти всех t и $\tilde A_0^{-1}(t)l^+[y]\in\mathrm{B}$. Поставим в соответствие каждому классу функций, отождествленных в B с $y\in D'$, класс функций, отождествленных в B с $\tilde A_0^{-1}(t)l^+[y]$. Таким образом, получим линейное отношение $L'\subset\mathrm{B}\times\mathrm{B}$, замыкание которого обозначим через L и назовем максимальным отношением. Минимальное отношение L_0 определим как сужение L на множество элементов $\tilde y\in\mathrm{B}$, обладающих представителями $y\in D'$ со свойством $y(0)=y'(0)=y(b)=y'(b)=0$.

Пусть Q_0 – множество таких элементов $c \in H \times H$, что $A(t)W(t,0)c = 0$ почти всюду; Q – ортогональное дополнение в $H \times H$ к Q_0. Введем на Q скалярное произведение

$$(c_1, c_2)_- = \int_0^b (A(s)W(t,0)c_1, W(t,0)c_2)dt \quad (c_1, c_2 \in Q). \tag{6}$$

Пусть Q_- – пополнение Q по норме, порожденной этим скалярным произведением, Q_+ – позитивное пространство по отношению к Q, Q_-. Так же как в [3, 8] доказывается, что $A(t)W(t,\lambda)c = 0$ почти всюду тогда и только тогда, когда $c \in Q_0$. При замене в (6) $W(t,0)$ на $W(t,\lambda)$ получится то же множество Q_- с эквивалентной нормой. Так как последовательность $\{W(t,\lambda)x_n\}$ $(x_n \in H \times H)$ равномерно на $[0,b]$ сходится в H к $W(t,\lambda)x$ $(x \in H \times \hat{H}_{-1/2})$ при $x_n \to x$ в $H \times \hat{H}_{-1/2}$, то $H \times \hat{H}_{-1/2} \subset Q_-$. Символ $\tilde{W}(t,\lambda)x$ $(x \in Q_-)$ обозначает класс функций, к которому сходится в B последовательность $\{\tilde{W}(t,\lambda)x_n\}$ $(x_n \in Q)$, когда $x_n \to x$ в Q_-. Пусть $V(\lambda) : Q_- \to \mathrm{B}$ – оператор, определенный равенством $V(\lambda)x = \tilde{W}(t,\lambda)x$. Так как $\ker V(\lambda) = \{0\}$ и область значений $V(\lambda)$ замкнута, то сопряженный оператор $V^*(\lambda)\tilde{f} = \int_0^b W^*(s,\lambda)\tilde{A}(s)f(s)ds$ непрерывно отображает B на Q_+.

Леммы 3, 4 доказываются с учетом лемм 1, 2 так же как в [3, 8].

Лемма 3. *Отношение $L - \lambda E$ состоит из таких пар $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in \mathrm{B} \times \mathrm{B}$, что*

$$\tilde{y} = \tilde{W}(t,\lambda)c + \tilde{F}, \tag{7}$$

где $c \in Q_-$, $\tilde{F}$ – класс функций, отождествленных в пространстве B *с функцией*

$$F(t) = -W(t,\lambda)J_0 \int_0^t W^*(s,\bar{\lambda})\tilde{A}(s)f(s)ds.$$

Замечание 5. При отсутствии операторного веса (т.е. при $A(t) = E$) справедливо равенство $Q_- = H \times \hat{H}_{-1/2}$ [2, 5].

Лемма 4. *L_0 - замкнутое симметрическое отношение и $L_0^* = L$.*

3. Обобщенные резольвенты отношения L_0

Для построения формулы обобщенных резольвент отношения L_0 удобно использовать пространство граничных значений (ПГЗ) из [9]. Пусть B_1, B_2, $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ –банаховы пространства, $T \subset \mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2$ – замкнутое линейное отношение, $\delta : T \to \tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2$ – линейный оператор. Обозначим $\delta_i = P_i\delta$ $(i = 1,2)$, где P_i – проектор $\tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2$ на $\tilde{B}_i$, т.е. $P_i\{x_1, x_2\} = x_i$.

Определение. [9]. Четверка $(\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \delta_1, \delta_2)$ называется пространством граничных значений (ПГЗ) для замкнутого отношения T, если оператор δ непрерывно отображает T на $\tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2$ и сужение оператора δ_1 на $\mathrm{Ker}T$ является взаимно однозначным отображением $\mathrm{Ker}T$ на $\tilde{B}_1$.

С каждым ПГЗ связан оператор $\Phi_\delta : \tilde{B}_1 \to \tilde{B}_2$, определенный равенством $\Phi_\delta = \delta_2\beta$, где $\beta = (\delta_1|_{\mathrm{Ker}T})^{-1}$ – оператор, обратный к сужению δ_1 на $\mathrm{Ker}T$. Обозначим $T_0 = \ker\delta$. Из определения ПГЗ вытекает, что между отношениями $\theta \subset \tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2$ и отношениями $\hat{T}$ со свойством $T_0 \subset \hat{T} \subset T$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством: $\delta\hat{T} = \theta$. В этом случае обозначаем $\hat{T} = T_\theta$.

Лемма 5. [9]. *Пусть $\mathcal{R}(T) = \mathrm{B}_2$. Отношение T_θ^{-1} является ограниченным всюду определенным оператором тогда и только тогда, когда таким же оператором является $(\theta - \Phi_\delta)^{-1}$.*

Каждой паре $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L - \lambda E$, представленной в виде (7), поставим в соответствие пару граничных значений $\{Y(\lambda), Y'(\lambda)\} \in Q_- \times Q_+$ по формулам

$$Y'(\lambda) = V(\bar{\lambda})\tilde{f} = \int_0^b W^*(s,\bar{\lambda})\tilde{A}(s)\tilde{f}(s)ds, \quad Y(\lambda) = c - (1/2)J_0Y'(\lambda).$$

Обозначим $\Gamma_1(\lambda)\{\tilde{y},\tilde{f}\} = Y(\lambda)$, $\Gamma_2(\lambda)\{\tilde{y},\tilde{f}\} = Y'(\lambda)$ и $\Gamma(\lambda)\{\tilde{y},\tilde{f}\} = \{Y(\lambda),Y'(\lambda)\}$. Из леммы 3 следует, что четверка $\{Q_-,Q_+,\Gamma_1(\lambda),\Gamma_2(\lambda)\}$ является ПГЗ для отношения $L-\lambda E$. Соответствующий оператор $\Phi_{\Gamma(\lambda)} = 0$.

Из леммы 3 вытекает, что $\{\tilde{y},\tilde{f}\}$ тогда и только тогда принадлежит $L-\lambda E$, когда

$$\tilde{y}(t)=\tilde{W}(t,\lambda)\left(Y(\lambda)-\frac{1}{2}J_0\int\limits_0^t W^*(s,\bar{\lambda})\tilde{A}(s)f(s)ds+\frac{1}{2}J_0\int\limits_t^b W^*(s,\bar{\lambda})\tilde{A}(s)f(s)ds\right), \qquad (8)$$

Как отмечено выше, между отношениями $\hat{L}(\lambda)$ со свойством $L_0 \subset \hat{L}(\lambda) \subset L$ и отношениями $\theta(\lambda) \subset Q_-\times Q_+$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\Gamma(\lambda)(\hat{L}(\lambda)-\lambda E) = \theta(\lambda)$. Отношение $\hat{L}(\lambda)$, удовлетворяющее последнему равенству, обозначаем $L_{\theta(\lambda)}$. Из леммы 5 вытекает, что отношение $(L_{\theta(\lambda)}-\lambda E)^{-1}$ тогда и только тогда является ограниченным всюду определенным оператором, когда таким же оператором является отношение $\theta^{-1}(\lambda)$. Для принадлежности пары $\{\tilde{y},\tilde{f}\}$ отношению $L_{\theta(\lambda)}-\lambda E$, необходимо и достаточно, чтобы в равенстве (8) $Y(\lambda) = \theta^{-1}(\lambda)Y'(\lambda)$ или $Y(\lambda) = M(\lambda)Y'(\lambda)$, где $M(\lambda) = \theta^{-1}(\lambda)$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При фиксированном λ отношение $R(\lambda) \subset \mathrm{B}\times\mathrm{B}$ тогда и только тогда обладает свойством $(L_0-\lambda E)^{-1} \subset R(\lambda) \subset (L-\lambda E)^{-1}$ и является ограниченным всюду определенным оператором, когда $R(\lambda)$ имеет вид*

$$R(\lambda)\tilde{f} = \int\limits_0^b K(t,s,\lambda)\tilde{A}(s)f(s)ds, \qquad (9)$$

где

$$K(t,s,\lambda) = \tilde{W}(t,\lambda)(M(\lambda)+(1/2)\mathrm{sgn}(s-t)J_0)W^*(s,\bar{\lambda}), \qquad (10)$$

$M(\lambda){:}\,Q_+\to Q_-$ *– ограниченный всюду определенный оператор.*

Напомним определение обобщенной резольвенты. Пусть B – J-пространство ($J^* = J = J^{-1}$), $\mathcal{L}_0$ – замкнутое J-симметрическое отношение, $\mathcal{L}_0 \subset B\times B$. Операторная функция R_λ называется обобщенной резольвентой отношения $\mathcal{L}_0$ в некоторой окрестности Λ_0 точки λ_0 ($\mathrm{Im}\lambda_0 \neq 0$), если существуют такое $\tilde{J}$-пространство $\tilde{B} \supset B$ ($\tilde{J}\mid_B = J$) и такое $\tilde{J}$-самосопряженное отношение $\tilde{\mathcal{L}} \supset \mathcal{L}_0$, $\tilde{\mathcal{L}} \subset \tilde{B}\times\tilde{B}$, что $\Lambda_0 \subset \rho(\tilde{\mathcal{L}})$ и для всех $\lambda \in \Lambda_0$ выполняется равенство $R_\lambda = P(\tilde{\mathcal{L}}-\lambda E)^{-1}\mid_B$, где P – ортопроектор $\tilde{B}$ на B, $\rho(\tilde{\mathcal{L}})$ – резольвентное множество. Обобщенная резольвента называется $\varkappa$-регулярной, если в качестве $\tilde{B}$ можно выбрать такое пространство, что $\tilde{B}\ominus B$ является пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$. При $\varkappa = 0$ обобщенная резольвента называется регулярной.

Ограниченный оператор $\mathbf{I}_{\alpha\beta}(\lambda,\mu){:}\,Q_-\to Q_+$ определим равенством

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta}(\lambda,\mu)x = \int\limits_\alpha^\beta W^*(s,\mu)\tilde{A}(s)\tilde{W}(s,\lambda)xdt \quad (x\in Q_-,\ \ 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant b).$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.* 1^0. *Операторная функция R_λ тогда и только тогда является обобщенной резольвентой отношения L_0 в некоторой окрестности Λ_0 точки λ_0 ($\mathrm{Im}\lambda_0 \neq 0$), когда R_λ является в этой окрестности интегральным оператором (9) с ядром (10), где $M(\lambda)$ – голоморфная в Λ_0 операторная функция, значения которой – ограниченные операторы, отображающие Q_+ в Q_-.* 2^0. *Обобщенная резольвента R_λ $\varkappa$-регулярна в том и только том случае, когда операторная функция*

$$\mathbf{N}(\lambda,\mu) = (\lambda-\bar{\mu})^{-1}(M(\lambda)-M^*(\mu)) - \\ -(M^*(\mu)-2^{-1}J_0)\mathbf{I}_{0s_0}(\lambda,\mu)(M(\lambda)+2^{-1}J_0)-(M^*(\mu)+2^{-1}J_0)\mathbf{I}_{s_0b}(\lambda,\mu)(M(\lambda)-2^{-1}J_0)$$

имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов в Λ_0 и отрицательная часть спектров операторов $\mathbf{N}(\lambda_0,\lambda_0)$, $\mathbf{N}(\bar{\lambda}_0,\bar{\lambda}_0)$ состоит из $\varkappa_1 \leqslant \varkappa$ собственных значений (с учетом кратности).

Первая часть теоремы 2 доказывается с учетом теоремы 1 так же как аналогичное утверждение из [3]. Докажем вторую часть. Пусть $x_1, x_2 \in Q_+$. Обозначим

$$\tilde{z}_\lambda(t) = \tilde{W}(t,\lambda)(M(\lambda) - (1/2)J_0)x_1, \quad \tilde{z}_\mu(t) = \tilde{W}(t,\mu)(M(\mu) - (1/2)J_0)x_2,$$

$$\tilde{u}_\lambda(t) = \tilde{W}(t,\lambda)(M(\lambda) + (1/2)J_0)x_1, \quad \tilde{u}_\mu(t) = \tilde{W}(t,\mu)(M(\mu) + (1/2)J_0)x_2.$$

Так как $\mathcal{R}(V^*(\bar{\lambda})) = Q_+$, то существуют такие функции $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in$ B, что $V^*(\bar{\lambda})\tilde{f}_1 = x_1$, $V^*(\bar{\lambda})\tilde{f}_2 = x_2$. Пусть $\tilde{y}_\lambda = R_\lambda \tilde{f}_1$, $\tilde{y}_\mu = R_\mu \tilde{f}_2$. Тогда

$$\tilde{y}_\lambda = \tilde{W}(t,\lambda)\left(M(\lambda)x_1 - \frac{1}{2}J_0\int_0^t W^*(s,\bar{\lambda})\tilde{A}(s)f_1(s)ds + \frac{1}{2}J_0\int_t^b W^*(s,\bar{\lambda})\tilde{A}(s)f_1(s)ds\right),$$

Аналогичное равенство с заменой λ на μ, x_1 на x_2, f_1 на f_2 имеет место для y_μ.

Обозначим $\varphi_\lambda(t) = z_\lambda(t) - y_\lambda(t)$, $\psi_\lambda(t) = u_\lambda(t) - y_\lambda(t)$. Тогда $\{\tilde{\varphi}_\lambda, \tilde{f}_1 + \lambda\tilde{\varphi}_\lambda\}, \{\tilde{\psi}_\lambda, \tilde{f}_1 + \lambda\tilde{\psi}_\lambda\} \in L'$. Так как $\int_\alpha^\beta W^*(s,\bar{\lambda})\tilde{A}(s)f_1(s)ds \in Q_+$ для всех α, β $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$, то $J_0\breve{\varphi}_\lambda(s_0) \in Q_+$, $J_0\breve{\psi}_\lambda(s_0) \in Q_+$. Отметим также, что $\breve{\varphi}_\lambda(b) = 0$, $\breve{\psi}_\lambda(0) = 0$. Аналогичные утверждения справедливы для $\varphi_\mu = z_\mu - y_\mu$, $\psi_\mu = u_\mu - y_\mu$. Обозначим $\tilde{\omega}_\lambda(t) = \tilde{y}_\lambda(t) - \tilde{W}(t,\lambda)M(\lambda)x_1$, $\tilde{\omega}_\mu(t) = \tilde{y}_\mu(t) - \tilde{W}(t,\mu)M(\mu)x_2$.

Равенство (5) можно переписать в виде

$$\int_\alpha^\beta (\tilde{A}(t)v_1(t), w(t))dt - \int_\alpha^\beta (\tilde{A}(t)v(t), w_1(t))dt = (J_0\breve{v}(t), \breve{w}(t)\mid_\alpha^\beta, \tag{11}$$

где $\{\tilde{v}, \tilde{v}_1\}, \{\tilde{w}, \tilde{w}_1\} \in L'$ и v, w – представители классов $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Пусть пара $\{\tilde{w}, \tilde{w}_1\} \in L$. Из леммы 3 следует

$$\tilde{w}(t) = \tilde{W}(t,0)\left(x_0 - J_0\int_{s_0}^t W^*(s,0)\tilde{A}(s)w_1(s)ds\right),$$

где $x_0 \in Q_-$. Элемент x_0 единственным образом определяется по паре $\{\tilde{w}, \tilde{w}_1\} \in L$. Обозначим $\breve{w}(s_0) = x_0$ (это соответствует ранее введенному обозначению для дифференцируемых функций). Предельным переходом получим, что (11) справедливо в следующих случаях: (a) $\alpha = 0$, $\beta = s_0$, $\breve{v}(0) = 0$, $J_0\breve{v}(s_0) \in Q_+$, $\{\tilde{w}, \tilde{w}_1\} \in L$; (b) $\{\tilde{v}, \tilde{v}_1\} \in L$, $\alpha = 0$, $\beta = s_0$, $\breve{w}(0) = 0$, $J_0\breve{w}(s_0) \in Q_+$; (c) $\alpha = s_0$, $\beta = b$, $J_0\breve{v}(s_0) \in Q_+$, $\breve{v}(b) = 0$, $\{\tilde{w}, \tilde{w}_1\} \in L$; (d) $\{\tilde{v}, \tilde{v}_1\} \in L$, $\alpha = s_0$, $\beta = b$, $J_0\breve{w}(s_0) \in Q_+$, $\breve{w}(b) = 0$. В случае (a) положим $v = \psi_\lambda$; в случае (b) $w = \psi_\mu$; в случае (c) $v = \varphi_\lambda$; в случае (d) $w = \varphi_\mu$. Тогда, используя (11), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(0,s_0) = &\int_0^{s_0}(\tilde{A}(t)(-f_1 + \lambda u_\lambda - \lambda y_\lambda), u_\mu + y_\mu))dt - \int_0^{s_0}(u_\lambda - y_\lambda, \tilde{A}(t)(f_2 + \mu u_\mu + \mu y_\mu))dt + \\ &+ \int_0^{s_0}(\tilde{A}(t)(f_1 + \lambda u_\lambda + \lambda y_\lambda), u_\mu - y_\mu))dt - \int_0^{s_0}(u_\lambda + y_\lambda, \tilde{A}(t)(-f_2 + \mu u_\mu - \mu y_\mu))dt = \\ &= (-2^{-1}x_1 - J_0\breve{\omega}_\lambda(s_0), 2M(\mu)x_2 + 2^{-1}J_0x_2 + \breve{\omega}_\mu(s_0)) + \\ &\quad + (2J_0M(\lambda)x_1 - 2^{-1}x_1 + J_0\breve{\omega}_\lambda(s_0), 2^{-1}J_0x_2 - \breve{\omega}_\mu(s_0)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(s_0,b) = &\int_{s_0}^b(\tilde{A}(t)(-f_1 + \lambda z_\lambda - \lambda y_\lambda), z_\mu + y_\mu)dt - \int_{s_0}^b(z_\lambda - y_\lambda, \tilde{A}(t)(f_2 + \mu z_\mu + \mu y_\mu))dt + \\ &+ \int_{s_0}^b(\tilde{A}(t)(f_1 + \lambda z_\lambda + \lambda y_\lambda), z_\mu - y_\mu)dt - \int_{s_0}^b(z_\lambda + y_\lambda, \tilde{A}(t)(-f_2 + \mu z_\mu - \mu y_\mu))dt = \\ &= (-2^{-1}x_1 + J_0\breve{\omega}_\lambda(s_0), 2M(\mu)x_2 - 2^{-1}J_0x_2 + \breve{\omega}_\mu(s_0)) - \\ &\quad - (2J_0M(\lambda)x_1 + 2^{-1}x_1 + J_0\breve{\omega}_\lambda(s_0), -2^{-1}J_0x_2 - \breve{\omega}_\mu(s_0)).\end{aligned}$$

Отсюда имеем $\mathcal{I}(0,s_0) + \mathcal{I}(s_0,b) = 2(M(\lambda)x_1, x_2) - 2(x_1, M(\mu)x_2)$.

С другой стороны, непосредственными вычислениями получим

$$\mathcal{I}(0,s_0)+\mathcal{I}(s_0,b)=2(\lambda-\bar{\mu})\left(\int\limits_0^{s_0}(\tilde{A}(t)u_\lambda,u_\mu)dt+\int\limits_{s_0}^{b}(\tilde{A}(t)z_\lambda,z_\mu)dt\right)-$$

$$-2\left(\int\limits_0^{b}(\tilde{A}(t)(f_1+\lambda y_\lambda),y_\mu)dt-\int\limits_0^{b}(y_\lambda,\tilde{A}(t)(f_2+\mu y_\mu))dt\right).$$

Из последних двух равенств следует

$$(\mathbf{N}(\lambda,\mu)x_1,x_2)=\langle((\lambda-\bar{\mu})^{-1}(R_\lambda-R_\mu^*)-R_\mu^*R_\lambda)\tilde{f}_1,\tilde{f}_2\rangle.$$

Далее доказательство теоремы повторяет соответствующие рассуждения из [3].

Список литературы

[1] Штраус А.В. *Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка* // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1957. – Т. 21, N. 6, – с. 785-808.

[2] Брук В.М. *Некоторые вопросы спектральной теории дифференциального уравнения второго порядка с переменным неограниченным операторным коэффициентом* // Матем. заметки – 1974. – Т. 16, N. 5, – с. 813-822.

[3] Брук В.М. *Об обратимых сужениях отношений, порожденных дифференциальным выражением и неотрицательной операторной функцией* // Матем. заметки – 2007. – Т. 82, N. 5, – с. 652-664.

[4] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* // Москва: Наука, 1967.

[5] Вайнерман Л.И. *Самосопряженные граничные задачи для сильно эллиптических и гиперболических уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве* //Докл. АН СССР – 1974. – Т. 218, N. 4, – с. 745-748.

[6] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Некоторые вопросы спектральной теории линейного дифференциального уравнения второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами* // Укр. матем. журнал – 1971. – Т. 23, N. 1, – с. 3-14.

[7] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов* // Матем. сборник – 2002. – Т. 193, N. 11. – С. 3-42.

[8] Bruk V.M. *On spaces of boundary values for relations generated by a formally selfadjoint expression and a nonnegative function* // J. of Math. Phys., Anal., Geom. – 2006. – V. 2, N. 3, – p. 268-277.

[9] Брук В.М. *О спектре линейных отношений, связанных с равномерно корректными задачами* // Дифференциальные уравнения – 2007. – Т. 43, N. 1, – с. 21-27.

Саратовский государственный технический университет
ул. Политехническая, 77, 410054, Саратов, Россия
E-mail: vladislavbruk@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.984 MSC2000: 34A55 34B24 47E05

С.А. Бутерин

ОБРАТНАЯ УЗЛОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Введение

Рассмотрим дифференциальный пучок $L = L(q_0(x), q_1(x), h, H)$ вида

$$y'' + (\rho^2 - 2\rho q_1(x) - q_0(x))y = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(1) + Hy(1) = 0 \tag{2}$$

с нелинейной зависимостью от спектрального параметра ρ, где $q_j(x) \in W_1^j[0,1]$ – вещественные функции, и $h, H \in \mathbb{R}$. В работе исследуется обратная узловая задача, заключающаяся в отыскании функций $q_0(x)$, $q_1(x)$ и чисел h, H по узлам (нулям) собственных функций пучка L. В настоящее время обратные узловые задачи наиболее полно изучены для уравнения Штурма–Лиувилля и других дифференциальных уравнений второго порядка с линейной зависимостью от спектрального параметра (см. [1]–[6]). Известно, например, что при $q_1(x) \equiv 0$ функция $q_0(x)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого вместе с числами h, H по любому всюду плотному множеству узловых точек.

Сначала мы докажем, что при естественной нумерации n-я собственная функция пучка L для достаточно больших $|n|$ имеет в точности $|n|$ узлов в интервале $(0, 1)$, что по сути является обобщением осцилляционной теоремы Штурма для оператора Штурма–Лиувилля. Заметим, что для любой постоянной C пучок

$$L_C = L(q_0(x) + 2Cq_1(x) - C^2, q_1(x) - C, h, H)$$

обладает теми же собственными функциями, что и L. В самом деле, L_C получается из L сдвигом спектрального параметра $\rho \to \rho + C$. Ниже доказано, что при

$$q_1(x) \neq const \tag{3}$$

это единственная модификация L, сохраняющая узловые точки. Иначе имеем двухпараметрическое семейство пучков $L(q_0(x) + C_0, C_1)$ с одним и тем же множеством узлов. В дальнейшем без ущерба для общности будем считать, что

$$\omega := \int_0^1 q_1(x)\, dx = 0, \tag{4}$$

и исключим из рассмотрения оператор Штурма–Лиувилля ($q_1(x) \equiv 0$), то есть предположим также (3). При этих условиях мы докажем единственность восстановления функций $q_0(x)$, $q_1(x)$ и чисел h, H по любому всюду плотному множеству узлов и получим конструктивную процедуру решения обратной узловой задачи.

Отметим, что обратные узловые задачи тесно связаны с обратными задачами спектрального анализа (см. монографии [7]–[10]). Для дифференциальных пучков второго порядка последние исследовались в [11], [12] и других работах.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (проект МК-1701.2007.1) и грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

В следующем разделе установлена осцилляция собственных функций и получена асимптотика узловых точек. Далее, в разделе 2 доказывается теорема единственности и приводится алгоритм решения обратной узловой задачи. Основные результаты статьи содержатся в теоремах 3, 4.

1. Теорема об осцилляции. Асимптотика узлов

Пусть функция $\varphi(x,\rho)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям $\varphi(0,\rho)=1$, $\varphi'(0,\rho)=h$. Собственные значения краевой задачи (1), (2) совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\rho):=V(\varphi(x,\lambda))$. Обозначим

$$Q(x):=\int\limits_0^x q_1(t)\,dt. \tag{5}$$

Известным методом (см., например, [10]) доказывается, что

$$\varphi(x,\rho)=\cos(\rho x-Q(x))+\xi(x,\rho), \tag{6}$$

где

$$\xi^{(\nu)}(x,\rho)=O\Big(\frac{1}{\rho^{1-\nu}}\exp(|Im\rho|x)\Big),\quad \nu=0,1,\quad |\rho|\to\infty, \tag{7}$$

равномерно по $x\in[0,1]$. Следовательно, характеристическая функция имеет вид

$$\Delta(\rho)=-\rho\sin\rho+O(\exp(|Im\rho|)),\quad |\rho|\to\infty.$$

С помощью этого представления и теоремы Руше обычным образом доказывается, что краевая задача (1), (2) обладает счетным множеством собственных значений $\{\rho_0,\,\rho_{-0},\,\rho_1,\,\rho_{-1},\,\rho_2,\,\rho_{-2},\ldots\}$, имеющих вид

$$\rho_n=\pi n+O\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad |n|\to\infty. \tag{8}$$

Теорема 1. *Для достаточно больших $|n|$ собственная функция $y_n(x):=\varphi(x,\rho_n)$ имеет в точности $|n|$ нулей x_n^j в интервале $(0,1)$:*

$$0<x_n^1<x_n^2<\cdots<x_n^n<1\quad\text{для}\quad n>0$$

и

$$0<x_n^0<x_n^{-1}<\cdots<x_n^{n+1}<1\quad\text{для}\quad n<0.$$

При этом

$$x_n^j=\frac{1}{n}\Big(j-\frac12\Big)+\frac{Q(\frac{j}{n})}{\pi n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\quad |n|\to\infty, \tag{9}$$

равномерно по j.

Доказательство. Сначала заметим, что ρ_n вещественны для достаточно больших $|n|$. В самом деле, согласно (8) при больших $|n|$ в круге $D_n:=\{\rho:|\rho-\pi n|\le 1\}$ лежит в точности одно собственное значение ρ_n. Учитывая вещественность коэффициентов пучка L, заключаем, что $\overline{\rho_n}\in D_n$ также является его собственным значением, а следовательно, $\rho_n=\overline{\rho_n}$. Таким образом, для больших $|n|$ собственные функции $y_n(x)$ вещественнозначны. Подставляя (8) в (6), приходим к

$$y_n(x)=\cos(\pi nx-Q(x))+\varepsilon_n(x), \tag{10}$$

где в силу (7), (8)

$$\varepsilon_n^{(\nu)}(x)=O\Big(\frac{1}{n^{1-\nu}}\Big),\quad \nu=0,1,\quad |n|\to\infty, \tag{11}$$

равномерно на $[0,1]$. Рассмотрим на интервале $(0,1)$ уравнение $y_n(x)=0$, которое согласно (10), (11) равносильно при больших $|n|$ совокупности уравнений

$$x=\chi_n^j(x):=\frac{1}{n}\Big(j-\frac12\Big)+\frac{Q(x)}{\pi n}+\varepsilon_n^j(x),\quad j\in\mathbb{Z}, \tag{12}$$

где

$$\varepsilon_n^j(x)=(-1)^{j+1}\frac{\arcsin\varepsilon_n(x)}{\pi n}.$$

Оценки (11) дают
$$(\varepsilon_n^j)^{(\nu)}(x)=O\Big(\frac{1}{n^{2-\nu}}\Big),\quad \nu=0,1,\quad |n|\to\infty, \tag{13}$$
равномерно по $j\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0,1]$. Продолжим на $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ функцию $q_1(x)$ нулем, а функции $\varepsilon_n^j(x)$ таким образом, чтобы полученные функции были дифференцируемыми на $(-\infty,\infty)$ и удовлетворяли (13) равномерно по $x\in\mathbb{R}$ и $j\in\mathbb{Z}$. Нетрудно привести пример такого продолжения. Рассмотрим теперь уравнения (12) в $\mathbb{R}$. Согласно (13) и формуле
$$\chi_n^j(x_2)-\chi_n^j(x_1)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{x_1}^{x_2}q_1(t)\,dt+(\varepsilon_n^j)'(\theta)(x_2-x_1),\quad \theta\in(x_1,x_2),$$
при больших $|n|$ функция $\chi_n^j(x)$ осуществляет сжатие в $\mathbb{R}$, а значит, для каждого $j\in\mathbb{Z}$ уравнение (12) имеет единственное решение в $\mathbb{R}$, которое будем обозначать x_n^j. Подставляя x_n^j в (12), получаем
$$x_n^j=\frac{1}{n}\Big(j-\frac12\Big)+\frac{Q(x_n^j)}{\pi n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\quad |n|\to\infty, \tag{14}$$
равномерно по $j\in\mathbb{Z}$. В частности, имеем
$$x_n^j=\frac{j}{n}+O\Big(\frac1n\Big),\quad |n|\to\infty,$$
равномерно по j. Подставляя последнюю формулу в правую часть (14), получаем (9), что, в свою очередь, дает
$$x_n^{j+1}-x_n^j=\frac1n+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\quad |n|\to\infty,$$
равномерно по j. Следовательно, при больших $|n|$ будем иметь $x_n^j<x_n^{j+1}$ для $n>0$ и $x_n^j>x_n^{j+1}$ для $n<0$. При $j=0,1,n,n+1$ формула (9) дает
$$x_n^0=-\frac{1}{2n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\quad x_n^1=\frac{1}{2n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$
$$x_n^n=1-\frac{1}{2n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\quad x_n^{n+1}=1+\frac{1}{2n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$
Таким образом, учитывая порядок чисел x_n^j, $j\in\mathbb{Z}$, заключаем, что в точности $|n|$ из них лежит в интервале $(0,1)$ при больших $|n|$, а именно: x_n^j, $j=\overline{1,n}$, для положительных n и x_n^j, $j=\overline{n+1,0}$, для отрицательных n. □

Следствие 1. *Из* (9) *следует, что множество всех узлов* X *всюду плотно в* $[0,1]$.

Для решения обратной узловой задачи нам потребуется более точная асимптотика узловых точек, полученная в следующей теореме.

Теорема 2. *В представлении*
$$x_n^j=\frac1n\Big(j-\frac12\Big)+\frac{Q(x_n^j)}{\pi n}+\delta_n^j \tag{15}$$
остаточный член δ_n^j *имеет вид*
$$\delta_n^j=\frac{1}{(\pi n)^2}\Big(h+\frac12\int\limits_0^{x_n^j}(q_0(t)+q_1^2(t))\,dt-v_1x_n^j+\alpha_n(x_n^j)-\alpha_n(1)x_n^j\Big)$$
$$+\frac{1}{(\pi n)^3}\Big(hq_1(0)+\frac12\int\limits_0^{x_n^j}(q_0(t)+q_1^2(t))q_1(t)\,dt-v_2x_n^j\Big)+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big),\quad |n|\to\infty, \tag{16}$$
равномерно по j, *где*
$$\alpha_n(x)=\frac12\Big(\int\limits_0^x(p(t)+q_1^2(t))\cos(2\pi nt-2Q(t))\,dt-\int\limits_0^x q_1'(t)\sin(2\pi nt-2Q(t))\,dt\Big),$$
$$p(x)=q_0(x)-\int\limits_0^1q_0(t)\,dt,\quad v_1=h+H+\frac12\int\limits_0^1(q_0(t)+q_1^2(t))\,dt,$$

$$v_2 = hq_1(0) + Hq_1(1) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (q_0(t) + q_1^2(t))q_1(t)\,dt.$$

Доказательство. Как и для оператора Штурма–Лиувилля (см. [10]) можно уточнить асимптотику собственных функций (10), (11), в результате чего будем иметь

$$y_n(x) = \cos(\pi nx - Q(x)) + \frac{1}{\pi n}\Big\{\Big[h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))\,dt - v_1 x\Big]\sin(\pi nx - Q(x))$$

$$+\frac{q_1(x) - q_1(0)}{2}\cos(\pi nx - Q(x)) + \frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))\sin(\pi n(x-2t) - Q(x) + 2Q(t))\,dt$$

$$-\int\limits_0^x q_1'(t)\cos(\pi n(x-2t) - Q(x) + 2Q(t))\,dt)\Big) - \alpha_n(1)x\sin(\pi nx - Q(x)\Big\}$$

$$+\frac{1}{2(\pi n)^2}\Big\{\Big[h(q_1(0) + q_1(x)) + \int\limits_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))q_1(t)\,dt - 2v_2 x$$

$$+(q_1(x) - q_1(0))\Big(\frac{1}{2}\int\limits_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))\,dt - v_1 x\Big)\Big]\sin(\pi nx - Q(x))$$

$$+\Big[\Big(2h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))\,dt - v_1 x\Big)\Big(v_1 x - \frac{1}{2}\int\limits_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))\,dt\Big)$$

$$-\frac{(q_1(0) + q_1(x))^2}{4} + q_1^2(x)\Big]\cos(\pi nx - Q(x))\Big\} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad |n| \to \infty, \tag{17}$$

равномерно по $x \in [0,1]$. Подставляя (15) в (17), с учетом (14) получаем (16). $\square$

2. Теорема единственности. Решение обратной узловой задачи

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По заданному множеству узловых точек, найти функции $q_0(x)$, $q_1(x)$ и числа h, H.

Здесь и далее "множество узловых точек" понимается с учетом их нумерации. Другими словами, $\{x_n^j\}_{(n,j)\in I} = \{\tilde{x}_n^j\}_{(n,j)\in \tilde{I}}$ тогда и только тогда, когда $I = \tilde{I}$ и $x_n^j = \tilde{x}_n^j$ для всех $(n,j) \in I$.

Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.

Лемма 1. *Зафиксируем $x \in [0,1]$ и выберем $\{j_n\}$ так, чтобы $x_n^{j_n} \to x$ при $|n| \to \infty$. Тогда существуют конечные пределы и выполняются соответствующие тождества:*

$$Q(x) = \lim_{|n|\to\infty} \beta_n, \quad \text{где} \quad \beta_n = \pi(nx_n^{j_n} - j_n) + \frac{\pi}{2}, \tag{18}$$

$$f(x) = \lim_{|n|\to\infty} \gamma_n, \quad \text{где} \quad \gamma_n = \pi n(\beta_n - Q(x_n^{j_n})), \tag{19}$$

$$g(x) = \pi \lim_{|n|\to\infty} n(\gamma_n - f(x_n^{j_n}) - \alpha_n(x_n^{j_n}) + \alpha_n(1)x_n^{j_n}). \tag{20}$$

Здесь

$$f(x) = h(1-x) - Hx + \frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))\,dt - x\int\limits_0^1 (q_0(t) + q_1^2(t))\,dt\Big), \tag{21}$$

$$g(x) = h(1-x)q_1(0) - Hxq_1(1) + \frac{g_1(x)}{2}, \tag{22}$$

$$g_1(x) = \int\limits_0^x (q_0(t) + q_1^2(t))q_1(t)\,dt - x\int\limits_0^1 (q_0(t) + q_1^2(t))q_1(t)\,dt. \tag{23}$$

Докажем теорему единственности решения задачи 1.

Теорема 3. *Задание любого всюду плотного множества узлов $X_0 \subset X$ однозначно определяет функции $q_0(x)$, $q_1(x)$ и числа h, H, которые могут быть найдены с помощью следующего алгоритма.*

Алгоритм 1. *Пусть задано всюду плотное множество узлов X_0. Тогда*
1) для каждого $x \in [0,1]$ выбираем последовательность $\{x_n^{j_n}\} \subset X_0$, такую что $x_n^{j_n} \to x$ при $|n| \to \infty$;
2) находим функцию $Q(x)$ по формуле (18) и вычисляем

$$q_1(x) = Q'(x); \tag{24}$$

3) находим $f(x)$ по формуле (19) и получаем

$$h = f(0), \quad H = -f(1),$$

$$p(x) = 2(h+H) + 2f'(x) - q_1^2(x) + \int_0^1 q_1^2(t)\,dt; \tag{25}$$

4) фиксируем произвольное $x \in [0,1]$, такое что $Q(x) \neq 0$, находим число $g_1(x)$ по формулам (20), (22) и вычисляем

$$A = \frac{1}{Q(x)}\Big(g_1(x) - \int_0^x (p(t) + q_1^2(t))q_1(t)\,dt + x\int_0^1 (p(t) + q_1^2(t))q_1(t)\,dt\Big); \tag{26}$$

5) наконец, находим функцию $q_0(x)$ по формуле

$$q_0(x) = p(x) + A. \tag{27}$$

Доказательство. Формула (24) следует из (5). Далее, дифференцируя (21) и сравнивая полученное выражение с (25), получим

$$q_0(x) = p(x) + \int_0^1 q_0(t)\,dt.$$

Согласно (3) существует такое $x \in [0,1]$, что $Q(x) \neq 0$. Из формул (4), (23), (26) вытекает равенство

$$A = \int_0^1 q_0(t)\,dt,$$

откуда следует формула (27). □

В заключение посмотрим, что станет с теоремой единственности, если отказаться от предположения (4), по-прежнему требуя (3).

Теорема 4. *Задание любого всюду плотного множества узлов X_0 однозначно определяет функции $q_1(x) - \omega$, $q_0(x) + 2\omega q_1(x) - \omega^2$ и числа h, H.*

Для доказательства достаточно применить теорему 3 для пучка L_ω, имеющего те же узловые точки, что и L.

Список литературы

[1] McLaughlin J.R. *Inverse spectral theory using nodal points as data – a uniqueness result*, J. Diff. Eq. 73 (1988), no.2, 354–362.

[2] Hald O.H., McLaughlin J.R. *Solutions of inverse nodal problems*, Inverse Problems 5 (1989), 307–347.

[3] Law C.K., Shen C.-L., Yang C.-F. *The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function*, Inverse Problems 15 (1999), no.1, 253–263.

[4] Yang X.-F. *A new inverse nodal problem*, J. Diff. Eq. 169 (2001), 633–653.

[5] Law C.K., Tsay J. *On the well-posedness of the inverse nodal problem*, Inverse Problems 17 (2001), no.5, 1493–1512.

[6] Cheng Y.H., Shieh C.T., Law C.K. *A vectorial inverse nodal problem* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no.5, 1475–1484.

[7] Марченко В.А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Киев: Наукова Думка, 1977.

[8] Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма–Лиувилля.* М.: Наука, 1984.

[9] Yurko V.A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory.* Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.

[10] Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит, 2007.

[11] Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш. *Определение оператора диффузии по спектральным данным.* Докл. Акад. Наук Азерб. ССР 37 (1981), №2, 19–23.

[12] Yurko V.A. *An inverse problem for pencils of differential operators*, Matem. Sbornik 191 (2000), no. 10, 137-160 (Russian); English transl. in Sbornik: Mathematics 191 (2000), no.10, 1561–1586.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
ул. Астраханская 83, 410012, Саратов, Россия
E-mail: buterinsa@info.sgu.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.5 MSC2000: 41A45, 41A46

Е.В. Введенская

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ЗАДАННОЙ НЕТОЧНО

Пусть $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$– числовая последовательность, принадлежащая классу

$$l_2^1 = \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2, \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k)^2 \le 1\}.$$

Предположим, что вместо $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ известна последовательность

$$\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2,$$

такая, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_k - \widetilde{x}_k)^2 \le \delta^2.$$

Рассматривается задача восстановления значения x_0 по информации о $\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Под методами восстановления будем понимать всевозможные отображения

$$\varphi : l_2 \to \mathbb{R}.$$

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(\delta, \varphi) = \sup_{\substack{\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2^1, \\ \{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2, \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_k - \widetilde{x}_k)^2 \le \delta^2}} |x_0 - \varphi(\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}})|,$$

а погрешностью оптимального восстановления — величину

$$E(\delta) = \inf_{\varphi : l_2^1 \to \mathbb{R}} e(\delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом. Согласно общей теории (см.[1], [2], [3]) вычисление погрешности оптимального восстановления сводится к решению следующей экстремальной задачи

$$E(\delta) = \sup_{\substack{\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2^1, \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} {x_k}^2 \le \delta^2}} |x_0|.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \lambda_1, \lambda_2) = -x_0 + \lambda_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} {x_k}^2 + \lambda_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k)^2.$$

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа приводят к уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = 0 \Rightarrow 2\lambda_2 x_1 - 2(\lambda_1 + 2\lambda_2)x_0 + 2\lambda_2 x_{-1} = -1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow x_{j+1} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 2\right) x_j + x_{j-1} = 0 \tag{2}$$

Будем искать решение (1) и (2) в виде

$$x_j = x_0 \mu^{|j|}, j \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

При этом из (1) следует

$$\mu_1 = \mu = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + 1\right)^2 - 1} < 1, \ \mu_2 = \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + 1 + \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + 1\right)^2 - 1} > 1 \tag{4}$$

Из (4) видно, что $\mu > 0$. Из (3) и из равенства $\sum_{k\in\mathbb{Z}} {x_k}^2 = \delta^2$ получим ${x_0}^2\left(1+\frac{2\mu^2}{1-\mu^2}\right) = \delta^2$, откуда

$$ {x_0}^2 = \delta^2 \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \tag{5} $$

Из того, что $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_{k+1}-x_k)^2 = 1$, вытекает равенство $\sum_{k\in\mathbb{Z}} {x_0}^2(\mu^{|k+1|}-\mu^{|k|})^2 = 1$, из которого следует

$$ {x_0}^2 = \frac{1+\mu}{2(1-\mu)}. \tag{6} $$

Из (5) и (6) получим

$$ \mu = \frac{2\delta^2 - \sqrt{4\delta^2-1}}{2\delta^2-1}, \quad \delta > \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{7} $$

Из (6) и (7) следует, что

$$ \widehat{x}_0 = \frac{\sqrt[4]{4\delta^2-1}}{\sqrt{2}}. \tag{8} $$

Здесь $\{\widehat{x}_k\}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2-$ это последовательность из l_2 и множители Лагранжа, для которых выполняются необходимые условия (1) и (2). Из равенства (1) учитывая, что $\widehat{x}_1 = \widehat{x}_0\mu = \widehat{x}_{-1}$, получим, используя (2), (3), (4), а также легко проверяемое равенство $\widehat{\lambda}_1 = \frac{2\widehat{\lambda}_2}{2\delta^2-1}$,

$$ \widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(4\delta^2-1)^3}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{2\delta^2-1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{(4\delta^2-1)^3}}. $$

Итак, справедливы следующие теоремы

Теорема 1. *Для любой последовательности* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2^1$ *при* $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ *имеет место тождество*

$$ x_0 = 2\widehat{\lambda}_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\widehat{x}_k + 2\widehat{\lambda}_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_{k+1}-x_k)(\widehat{x}_{k+1}-\widehat{x}_k), \tag{9} $$

где

$$ \widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(4\delta^2-1)^3}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{2\delta^2-1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{(4\delta^2-1)^3}}, $$

а $\widehat{x}_k = \widehat{x}_0\mu^{|k|}$, *где* $\widehat{x}_0 = \frac{\sqrt[4]{4\delta^2-1}}{\sqrt{2}}$, *а* $\mu = \frac{2\delta^2-\sqrt{4\delta^2-1}}{2\delta^2-1}$.

Теорема 2. *При* $\delta > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$ E(\delta) = 2\widehat{\lambda}_1\delta^2 + 2\widehat{\lambda}_2 $$

а метод

$$ \widehat{\varphi}(\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2) = 2\widehat{\lambda}_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k\widetilde{x}_k \tag{10} $$

является оптимальным.

Список литературы

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. с. 79-100.

[2] *C.A.Micchelli and T.J.Rivlin* Lectures of Optimal Recovery // Numerical analisis (Sammer School, Lancaster, 1984) pp 21-93, Lecture Notes in Math., V.1129, Springer-Vorlag, Berlin, 1985.

[3] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. с. 51-64.

Московский Авиационно-технологический институт (МАТИ)

Российский Государственный Технологический университет им. К.Э. Циолковского

ул. Оршанская, 3, 121552 Москва, Россия

E-mail: zayatslena@yahoo.com

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.928 MSC2000: 34E05.01

С.Ф. Долбеева; Е.А. Чиж

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЛУЧАЕ ДВУХ РЕШЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Введение

В настоящей статье изучаются асимптотики решения двух задач: начальной

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = f(x,t,\varepsilon),\ x(t_0) = A,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{1}$$

и краевой

$$\varepsilon^2\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t),\ x'(t_0) = x'(t_1) = 0,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Предполагается,что предельное уравнение

$$f(x(t),t,0) \equiv 0 \tag{3}$$

имеет два решения и их графики пересекаются. Асимптотика решения в этом случае намного сложнее, чем в том случае, когда существует одно устойчивое решение уравнения (3).(Подробная библиография имеется в [1]).

В этой статье для задач (1), (2) при естественных дополнительных предположениях строятся равномерные асимптотические разложения решений с точностью до любой степени ε.

1. Начальная задача

Будем предполагать выполненными следующие условия.

1. Функция $f(x,t,\varepsilon)$ бесконечно дифференцируема при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на множестве $D = \{x,t : t_0 \leqslant t \leqslant t_1, |x| \leqslant B\}$.

2. Существуют функции $\varphi_1(t) \in C^\infty[t_0,t_1]$ и $\varphi_2(t) \in C^\infty[t_0,t_1]$ такие, что $|\varphi_j(t)| < B,\ f(\varphi_j(t),t,0) \equiv 0,\ j = \overline{1,2},\ \varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ при $t < t^*,\ \varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ при $t > t^*$.

3. Без ограничения общности будем считать, что $t^* = 0,\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ и, следовательно, $f(0,0,0) = 0$. Предположим, что при $t < 0$ решение $\varphi_1(t)$ устойчиво, а $\varphi_2(t)$ неустойчиво. Под этим понимается, что при $t < 0$ справедливы неравенства $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t),t,0) < 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t),t,0) > 0$

При $t > 0$ будем считать, что решение $\varphi_2(t)$ устойчиво, а $\varphi_1(t)$ неустойчиво, то есть $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t),t,0) > 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t),t,0) < 0$.

4. Начальное значение A находится в области влияния решения $\varphi_1(t)$, то есть $|A| < B$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t_0,0) < 0$ для всех значений между A и $\varphi_1(t_0)$.

При этих условиях $x(t,\varepsilon)$ — решение задачи (1), стремится к $\varphi_1(t)$ при $\varepsilon \to 0$, $t_0 < t < -\delta$, $\forall\delta > 0$. На отрезке $[t_0,-\delta]$ справедливо равномерное асимптотическое разложение [1]:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\frac{t-t_0}{\varepsilon}). \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-01-96002 р-урал-а)

Однако, при достаточно малых δ асимптотика перестаёт быть равномерной, и дальнейшее поведение решения $x(t,\varepsilon)$ в окрестности нуля и при $t>0$ (если оно продолжимо) не столь тривиально.

Из взаимного расположения графиков функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ вытекает, что $\varphi_1'(0)\leqslant\varphi_2'(0)$. Дополнительно предположим, что

$$\varphi_1'(0)<\varphi_2'(0). \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что при указанных выше предположениях справедливы соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=\frac{\partial f}{\partial t}(0,0,0)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0)\leqslant 0.$$

Дополнительное условие, которое мы будем предполагать и которое (так же, как и условие (5)) соответствует ситуации общего положения, следующее:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0)=-2\gamma^2<0.$$

Без ограничения общности будем далее считать, что

$$\varphi_1'(0)=-1,\ \varphi_2'(0)=1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0)=-2 \tag{6}$$

и, следовательно,

$$f(x,t,\varepsilon)=-(x^2-t^2)+O(\varepsilon+|x|^3+|t|^3). \tag{7}$$

На отрезке $[t_0,-\delta]$ справедливо равномерное асимптотическое разложение (4).

Коэффициенты $x_k(t)$ являются решениями рекуррентной системы уравнений, которая получается после формальной подстановки ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k(t) \tag{8}$$

в уравнение (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε.

Будем посредством $\sigma(t)$ обозначать бесконечно дифференцируемые при $t<0$ в окрестности нуля функции, не снабжая их дополнительными индексами: $\sigma(t)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_j t^j$. Из первого уравнения системы следует, что $x_1(t)=t^{-1}\sigma(t)$. Далее по индукции легко заключить, что

$$x_k(t)=t^{1-2k}\sigma(t).$$

При $0<t\leqslant t_1$ строится асимптотическое разложение решения

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{x}_k(t), \tag{9}$$

где $\tilde{x}_0(t)=\varphi_2(t)$, аналогичное разложению (8). Так как коэффициенты $x_k(t)$ имеют нарастающие особенности при $t\to\infty$, то тем самым рассматриваемая задача является бисингулярной [2]. В соответствии с методом согласования асимптотических разложений в окрестности особой точки (в данном случае в окрестности нуля) следует ввести новые, растянутые, переменные и рассмотреть другое асимптотическое разложение.

После замены переменных $t=\sqrt{\varepsilon}\tau, x=\sqrt{\varepsilon}y$, уравнение (1) приобретает вид:

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{1}{\varepsilon}f(\sqrt{\varepsilon}y,\sqrt{\varepsilon}\tau,\varepsilon). \tag{10}$$

Асимптотическое решение в окрестности нуля будем искать в виде ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}y_j(\tau). \tag{11}$$

Коэффициенты этого ряда $y_j(\tau)$ надо определить на всей оси τ от $-\infty$ до ∞. Уравнения для $y_j(\tau)$ получаются обычным способом: правая часть уравнения (10)

$\frac{1}{\varepsilon}f(\sqrt{\varepsilon}y, \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon)$ разлагается в ряд Тейлора в точке $(0,0,0)$. Затем ряд (11) надо подставить в уравнение (10) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Из вида уравнения (7) следует, что главный член асимптотики (11) — это функция $y_0(\tau)$, которая является решением уравнения

$$\frac{dy_0}{d\tau} = -(y_0^2 - \tau^2) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0,0,0).$$

Обозначим $\lambda = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0,0,0)$. Из соображений согласования ряда (11) с рядами (4), (9) функция $y_0(\tau)$ должна иметь асимптотику $-\tau$ при $\tau \to -\infty$ и асимптотику τ при $\tau \to \infty$. Такое решение существует тогда и только тогда, когда $\lambda > -1$, и в этом случае оно равно $\frac{w'(\tau)}{w(\tau)}$, где

$$w(\tau) = \left(\Gamma(a)\Phi(a, \frac{1}{2}, \tau^2) + 2\Gamma(\frac{a+1}{2})\ \tau\ \Phi(\frac{a+1}{2}, \frac{3}{2}, \tau^2)\right)\exp(-\frac{\tau^2}{2}). \tag{12}$$

Здесь $\Phi(\lambda, \mu, x)$ вырожденная гипергеометрическая функция ([3], стр. 528, 556, [4], стр. 120-122), $a = \frac{\lambda+1}{4}$.

Таким образом определённая функция $w(\tau)$ имеет следующие асимптотики:

$$w(\tau) = C|\tau|^{-1/2-\lambda}\exp(-\tau^2/2)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\tau^{-2k}\right),\ \tau \to -\infty. \tag{13}$$

$$w(\tau) = \tilde{C}\tau^{-1/2+\lambda}\exp(\tau^2/2)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k\tau^{-2k}\right),\ \tau \to \infty. \tag{14}$$

Нетрудно показать, что функция $y_0(\tau)$ положительна, а из формулы (12) вытекает, что $y_0(0) = \frac{2\Gamma(a+1/2)}{\Gamma(a)} = \frac{2\Gamma(\frac{\lambda+3}{4})}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{4})}$.

Из асимптотик (13) и (14) следует, что функция $y_0(\tau)$ ведёт себя как $-\tau$ при $\tau \to -\infty$ и как τ при $\tau \to \infty$. Более точно:

$$y_0(\tau) = -\tau + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\tau^{-2k+1},\ \tau \to -\infty,$$

$$y_0(\tau) = \tau + \sum_{k=1}^{\infty} d_k\tau^{-2k+1},\ \tau \to -\infty,$$

(Всюду в статье ряды понимаются как асимптотические.)

Коэффициенты c_k и d_k зависят от λ и однозначно вычисляются по рекуррентным формулам.

Уравнения для остальных коэффициентов разложения (11) при $k > 0$ линейные. Их исследование показывает, что существуют решения этих уравнений, которые имеют следующую асимптотику $y_k(\tau) = \tau^{k+1}\sigma(\tau^{-2})$ при $\tau \to \pm\infty$ и аналогичную асимптотику при $\tau \to \pm - \infty$.

таким образом построены внешние (8), (9) и внутреннее (11) формальные асимптотические разложения решения задачи (1). Далее можно установить, что эти ряды являются асимптотическими решениями задачи. Как всегда, это означает, что частичные суммы рядов приближённо удовлетворяют уравнению и начальным условиям.

Следующий этап состоит в проверке согласования внутреннего асимптотического разложения (11) и внешних асимптотических разложений (8), (9) для промежуточных значений t и τ, когда t достаточно мало, а τ достаточно велико.

Такое согласование рядов и построение составного разложения проводится аналогично [2].

Теорема 1. *Пусть $x(t,\varepsilon)$ является решением начальной задачи* (1) *и выполнены условия* **1-4**. *Пусть $0 < \alpha < 1/2$. Если выполнены условия* (6) *и $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0,0,0) > -1$, то ряд* (4) *является равномерным асимптотическим рядом для $x(t,\varepsilon)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant -\varepsilon^\alpha$, ряд* (9) *является равномерным асимптотическим рядом для $x(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon^\alpha \leqslant t \leqslant t_1$, а ряд* (11) *является равномерным асимптотическим рядом для $x(t,\varepsilon)$ при $|t| \leqslant \varepsilon^\alpha$.*

Если рассматривать задачу (1) до замены, приводящей к условию (6), то вместо условия $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0,0,0) > -1$, в этом случае достаточным условием построенной асимптотики является условие

$\lambda = (\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0))^{-1}\left(2\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0,0,0) - (\varphi_2'(0) + \varphi_1'(0)\right) > -1$. Это условие является точным. Действительно, легко видеть, что для уравнения

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = -x^2 + t^2 + b\varepsilon$$

$\lambda = b$ и при любых $b \leqslant -1,\ t_0 < 0,\ x(t_0, \varepsilon) = A > 0$ решение задачи (1) для малых положительных $\varepsilon > 0$ не продолжается при $t > 0$.

Отметим, что и при $\lambda < -1$ построенные ряды(4) и (11) являются равномерными асимптотическими всюду при $t < \sqrt{\varepsilon}(\tau_0 - \delta)$, где δ любое положительное число, а τ_0 полюс функции $y_0(\tau)$. Однако, скорее всего при таком λ решение задачи не продолжается для положительных t , как это видно для вышеприведённого примера.

2. Краевая задача

Будем предполагать выполненными следующие условия.

1а. Функция $f(x,t)$ бесконечно дифференцируема на множестве $D = \{x, t : t_0 \leqslant t \leqslant t_1, |x| \leqslant B\}$.

2а. Существуют функции $\varphi_1(t) \in C^\infty[t_0, t_1]$ и $\varphi_2(t) \in C^\infty[t_0, t_1]$ такие, что $|\varphi_j(t)| < B,\ f(\varphi_j(t), t) \equiv 0,\ j = \overline{1,2}$,
$\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ при $t < t^*,\ \varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ при $t > t^*,\ t_0 < t^* < t_1$.

3а. Без ограничения общности будем считать, что $t^* = 0$, $\varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = 0$ и, следовательно, $f(0,0) = 0$. Предположим, что при $t < 0$ справедливы неравенства $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t) > 0, \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t), t) < 0$. При $t > 0$ будем считать, что $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t) < 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_2(t), t) > 0$.

При этих условиях существует решение $x(t, \varepsilon)$ задачи (2), которое при $\varepsilon \to 0$ стремится к составному корню предельного уравнения [5]

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t^*, \\ \varphi_2(t) & \text{при} \quad t^* \leqslant t \leqslant t_1. \end{cases}$$

Для произвольного малого $\delta > 0$, не зависящего от ε, на отрезке $[t_0, -\delta]$ справедливо равномерное асимптотическое разложение [1], [5]:

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} x_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\frac{t - t_0}{\varepsilon}), \tag{15}$$

где $x_0(t) = \varphi_1(t)$. Однако, при достаточно малых δ асимптотика перестаёт быть равномерной.

Также как и в случае уравнения первого порядка из взаимного расположения графиков функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ вытекает, что $\varphi_1'(0) \leqslant \varphi_2'(0)$. Дополнительно предположим выполнение неравенства (5).

При указанных выше предположениях легко доказать, что справедливы соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \geqslant 0.$$

Дополнительное условие, которое мы будем предполагать и которое (так же, как и условие (5)) соответствует ситуации общего положения, следующее:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2\gamma^2 > 0.$$

Аналогично условию (6) без ограничения общности будем далее считать, что

$$\varphi_1'(0) = -1,\ \varphi_2'(0) = 1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \tag{16}$$

и, следовательно,

$$f(x,t) = (x^2 - t^2) + O(|x|^3 + |t|^3). \tag{17}$$

Как указано выше, на отрезке $[t_0, -\delta]$ справедливо равномерное асимптотическое разложение (15).

Коэффициенты $x_k(t)$ внешнего разложения являются решениями рекуррентной системы уравнений, которая получается после формальной подстановки ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} x_k(t) \tag{18}$$

в уравнение (2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε.

Из соотношений (16), (17) вытекает, что при $t < 0$ справедливо равенство $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), t) = -2t + O(t^2)$. Следовательно, $x_1(t) = -\dfrac{\varphi_1''(0)}{2t} + O(1)$. Будем посредством $\sigma(t)$ обозначать бесконечно дифференцируемые при $t < 0$ в окрестности нуля функции, не снабжая их дополнительными индексами: $\sigma(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j t^j$. Итак, из первого уравнения системы $x_1(t) = t^{-1}\sigma(t)$. Далее по индукции легко заключить, что

$$x_k(t) = t^{2-3k}\sigma(t).$$

Аналогичное асимптотическое разложение решения легко строится и при $\delta < t \leqslant t_1$. Формальное асимптотическое разложение имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \tilde{x}_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(\frac{t - t_1}{\varepsilon}), \tag{19}$$

где $\tilde{x}_0(t) = \varphi_2(t)$, а остальные коэффициенты также имеют особенности при $t \to 0 : \tilde{x}_k(t) = t^{2-3k}\tilde{\sigma}(t)$. Посредством $\tilde{\sigma}(t)$ также обозначаются функции бесконечно дифференцируемые при $t > 0$ в окрестности нуля.

Тем самым и эта рассматриваемая задача является бисингулярной по терминологии [2]. Введём теперь новые, растянутые, переменные и рассмотрим другое асимптотическое разложение.

После замены переменных $t = \varepsilon^{2/3}\tau, x(t) = \varepsilon^{2/3}y(\tau)$, уравнение (2) приобретает вид:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{1}{\varepsilon^{4/3}} f(\varepsilon^{2/3} y, \varepsilon^{2/3}\tau). \tag{20}$$

Асимптотическое решение в окрестности нуля будем искать в виде ряда

$$\varepsilon^{2/3} y(\tau) = \varepsilon^{2/3} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{2j/3} y_j(\tau). \tag{21}$$

Коэффициенты этого ряда $y_j(\tau)$ надо определить на всей оси τ от $-\infty$ до ∞. Уравнения для $y_j(\tau)$ получаются обычным способом.

Из равенства (17) следует, что главный член асимптотики (21) — это функция $y_0(\tau)$, которая является решением уравнения

$$\frac{d^2 y_0}{d\tau^2} = y_0^2 - \tau^2. \tag{22}$$

Из соображений согласования ряда (21) с рядами (15), (19) функция $y_0(\tau)$ должна иметь асимптотику $-\tau$ при $\tau \to -\infty$ и асимптотику τ при $\tau \to +\infty$. Известно [6], что уравнение (22) имеет решение $y_0(\tau)$ обладающее следующими свойствами:

1) $y_0 \sim -\tau$ при $\tau \to -\infty$, $y_0 \sim \tau$ при $\tau \to +\infty$;
2) $y_0(\tau) > |\tau|$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$;
3) $y_0(-\tau) = y_0(\tau)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $y'(0) = 0$.

Выпишем асимптотику функции $y_0(\tau)$ при $\tau \to +\infty$. С помощью замены $y_0(\tau) = g(\tau) + \tau$ уравнение (22) приводится к виду $g''(\tau) = 2\tau g(\tau) + g^2(\tau)$, $g(\tau) = o(\tau)$ при $\tau \to \infty$. Нетрудно показать, что $g(\tau)$ экспоненциально быстро стремится к нулю при $\tau \to +\infty$ и ведёт себя как решение линеаризованного уравнения Эйри $g''(\tau) = 2\tau g(\tau)$, функция $y_0(\tau)$ при $\tau \to +\infty$ имеет следующую асимптотику:

$$y_0(\tau) \stackrel{as}{=} \tau + \tau^{-\frac{1}{4}} \exp(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\tau^{3/2}) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{-\frac{3}{2}k}.$$

Аналогично при $\tau \to -\infty$

$$y_0(\tau) \stackrel{as}{=} -\tau + |\tau|^{-\frac{1}{4}} \exp(-\frac{2\sqrt{2}}{3}|\tau|^{3/2}) \sum_{k=0}^{\infty} c_k |\tau|^{-\frac{3}{2}k}.$$

Исследуем более точно уравнения для остальных коэффициентов разложения (21) при $j > 0$. Если после стандартной операции разложения в ряды Тейлора приравнять в равенстве (20) коэффициенты при одинаковых степенях ε, то получатся уравнения

$$\frac{d^2 y_k}{d\tau^2}(\tau) = 2y_0(\tau)y_k(\tau) + G_k(\tau),$$

где $G_k(\tau)$ — суммы членов вида $c_\alpha \tau^l \prod\limits_p y_{j_p}$, в которых присутствуют y_{j_p} с индексами, меньшими, чем k .

Асимптотика $y_1(\tau)$ носит степенной характер, более того

$$y_1(\tau) = \tau^2 \sigma(\tau^{-3}), \quad \text{при } \tau \to +\infty.$$

Аналогичное поведение функции $y_1(\tau)$ и $G_1(\tau)$ имеют при $\tau \to -\infty$.

Далее следует по индукции предположить, что

$$y_j(\tau) = \tau^{j+1}\sigma(\tau^{-3}),\ \tau \to \pm\infty$$

при $j < k$. Тогда из рассмотренного вида функций $G_k(\tau)$ следует, что $G_k(\tau) = \tau^{k+2}\sigma(\tau^{-3k})$ при $\tau \to \pm\infty$. Так же как и для $y_1(\tau)$, показывается, что $y_k(\tau) = \tau^{k+1}\sigma(\tau^{-3})$ при $\tau \to \pm\infty$.

Итак, полностью построены внешние (15), (19) и внутреннее (21) формальные асимптотические разложения решения задачи (2). Поэтому выясняется, насколько точно частичные суммы удовлетворяют уравнению (2) и в какой области.

В частности для внешнего разложения (18), если $\hat{x}_n(t) = \varphi_1(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon^{2k} x_k(t)$ частичная сумма ряда (18), то в области $t < -\varepsilon^\alpha, 0 < \alpha < 2/3$, справедлива оценка:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\hat{x}_n}{dt^2} - f(\hat{x}_n(t), t) = O(\varepsilon^{(n+2)(2-\alpha)}). \tag{23}$$

Для внутреннего разложения надо рассмотреть частичную сумму $\hat{y}_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^{2j/3} y_j(\tau)$ тогда, если рассматривать те значения внутренней переменной τ, для которых $|t| < \varepsilon^\beta$, (то есть $|\tau| < \varepsilon^{\beta - 2/3}$), $0 < \beta < 2/3$, то справедливо соотношение

$$\varepsilon^{4/3} \frac{d^2\hat{y}_n}{d\tau^2} - f(\varepsilon^{2/3}\hat{y}_n(\tau), \varepsilon^{2/3}\tau) = O(\varepsilon^{(n+3)\beta}). \tag{24}$$

Центральным пунктом исследования является доказательство согласования внутреннего асимптотического разложения (21) и внешних асимптотических разложений (18), (19) для промежуточных значений t и τ, когда t достаточно мало, а τ достаточно велико. Можно показать, что частичные суммы рядов (18) и (21) мало отличаются при $t = -\varepsilon^\alpha,\ 0 < \alpha < 2/3$, а частичные суммы рядов (19) и (21) мало отличаются при $t = \varepsilon^\alpha$. Такое согласование рядов и построение составного разложения проводится аналогично [2].

Кроме того, доказанные оценки (23), (24) и условия согласования рядов позволяют довольно легко доказать, что построенные ряды приближают решение задачи (2) равномерно с точностью до любой степени малого параметра.

Теорема 2. *Пусть $x(t, \varepsilon)$ является решением граничной задачи (2) и выполнены условия* **1a-3a**. *Пусть $0 < \alpha < 2/3$. Если выполнены условия (6), то ряд (15) является равномерным асимптотическим рядом для $x(t, \varepsilon)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant -\varepsilon^\alpha$, ряд (19) является равномерным асимптотическим рядом для $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon^\alpha \leqslant t \leqslant t_1$, а ряд (21) является равномерным асимптотическим рядом для $x(t, \varepsilon)$ при $|t| \leqslant \varepsilon^\alpha$.*

Список литературы

[1] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.:Высш. шк., 1990.

[2] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач М.:"Наука 1989 г., 336 с.

[3] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: ИЛ, 1951 г., 828 с.

[4] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.: "Наука 1995 г., 560 с.

[5] *Бутузов В.Ф., Нефёдов Н.Н.* Матем.заметки 1998. Т.63, №3, С.354-362

[6] *Holmes P.* On a second-order boundary-value problem arising in combustion theory // Quarterly of applied mathematics, 1982, N4, P. 53-62.

Челябинский государственный университет
ул. Братьев Кашириных, 129, 454021, Челябинск, Россия
E-mail: iam@csu.ru, eachizh@rambler.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 519.833 MSC2000: 27.47.19

В.И. Жуковский, Ю.Н. Житенева

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО БЕРЖУ-ВАЙСМАНУ[1]

1. Формализация

Рассматривается бескоалиционная игра N лиц

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

Здесь $\mathbb{N} = \{1,\dots,N\}$ - множество порядковых номеров игроков; X_i - множество (чистых) стратегий x_i у i-го игрока, $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$; функция выигрыша i-го игрока $f_i(x)$ определена на множестве $X = \prod\limits_{i=1}^{N} X_i \subset \mathbb{R}^{\sum n_i} = \mathbb{R}^n$ ситуаций $x = (x_1,\dots,x_N)$.

Игра происходит следующим образом. Игроки одновременно выбирают и используют свои стратегии x_i $(i \in \mathbb{N})$, в результате этого складывается ситуация $x \in X$. Затем каждый i-ый игрок получает выигрыш, равный значению функции $f_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$. При этом всякий игрок стремится выбрать такую свою стратегию, которая максимизирует значение функций выигрыша всех остальных игроков (игнорируя при этом “собственную выгоду”).

Определение 1. Ситуацию $x^B = (x_1^B,\dots,x_N^B) \in X$ назовем *удовлетворяющей условию равновесия по Бержу-Вайсману* в игре Γ, если при любом $x_j \in X_j$ $(j \in \mathbb{N})$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1^B, x_2, x_3, \dots, x_N) \le f_1(x^B),\\
&f_2(x_1, x_2^B, x_3, \dots, x_N) \le f_2(x^B),\\
&\dots\\
&f_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N^B) \le f_N(x^B).
\end{aligned} \tag{1}$$

2. Достаточные условия

Для построения достаточных условий существования ситуаций, удовлетворяющих условиям равновесия по Бержу-Вайсману введем вспомогательную функцию

$$\Phi(x,z) = \max_{i\in\mathbb{N}} [f_i(z \parallel x_i) - f_i(x)],$$

где

$$(z \parallel x_i) = (z_1,\dots,z_{i-1}, x_i, z_{i+1},\dots,z_N).$$

Теорема 1. *Если функция $\Phi(x,z)$ имеет седловую точку (максимум по $z \in X$ и минимум по $x \in X$), то в игре Γ существует ситуация, удовлетворяющая условию равновесия по Бержу-Вайсману.*

Доказательство. Пусть (x^B, z^0) – седловая точка функции $\Phi(x,z)$, именно, для любых $x \in X$ и $z \in X$

$$\Phi(x^B, z) \le \Phi(x^B, z^0) \le \Phi(x, z^0),$$

или справедлива следующая цепочка соотношений

$$\begin{aligned}
&\Phi(x^B, z) = \max_{i\in\mathbb{N}} [f_i(z \parallel x_i^B) - f_i(x^B)] \le \max_{i\in\mathbb{N}} [f_i(z^0 \parallel x_i^B) - f_i(x^B)] \le\\
&\le \max_{i\in\mathbb{N}} [f_i(z^0 \parallel x_i) - f_i(x)] = \Phi(x, z^0) \quad \forall (x,z) \in X \times X.
\end{aligned} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена в рамках исследований по гранту РФФИ N 05-01-00419.

Неравенства (2) выполнены и для $x = z^0 \in X$. Отсюда, учитывая равенство

$$f_i(z^0 \parallel z_i^0) - f_i(z^0) = 0,$$

получим

$$\max_{i\in\mathbb{N}}[f_i(z \parallel x_i^B) - f_i(x^B)] \leq 0 \quad \forall z \in X.$$

Значит, для всех $i \in \mathbb{N}$ и $z \in X$

$$f_i(z \parallel x_i^B) - f_i(x^B)] \leq 0.$$

Тогда, согласно определению 1, ситуация x^B удовлетворяет условию равновесия по Бержу-Вайсману в игре Г.

Таким образом, при выполнении требований теоремы 1 в игре Г существует ситуация x^B, удовлетворяющая условию равновесия по Бержу-Вайсману. □

Игре Г поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\tilde{\Gamma} = \langle \mathbb{N}, \{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\tilde{f}_i(\mu)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle.$$

В $\tilde{\Gamma}$, как и в игре Г, $\mathbb{N}$ - множество порядковых номеров игроков; M_i - множество смешанных стратегий i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$). Смешанная стратегия i-го игрока $\mu_i(\cdot)$ отождествляется с вероятностной мерой, определенной на борелевской алгебре подмножества X_i ($i \in \mathbb{N}$). Меры-произведения

$$\mu(x) = \mu_1(x_1)\dots\mu_N(x_N), \quad \mu(\cdot) \in M = M_1 \times \dots \times M_N$$

есть ситуации игры $\tilde{\Gamma}$ в смешанных стратегиях. Функции выигрыша i-го игрока здесь ставится в соответствие математическое ожидание

$$\tilde{f}_i(\mu) = \int\limits_X f_i(x)\mu(dx) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Определение 2. Ситуацию $\mu^B(\cdot) \in M$ назовем *удовлетворяющей условию равновесия по Бержу-Вайсману в игре* $\tilde{\Gamma}$, если для любых $\mu_j(\cdot) \in M_j$ ($j \in \mathbb{N}$, $j \neq i$) выполнена система неравенств

$$\tilde{f}_i(\mu \parallel \mu_i^B) \leq \tilde{f}_i(\mu^B) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

где ситуация в смешанных стратегиях

$$(\mu \parallel \mu_i^B) = \mu_1(\cdot)\dots\mu_{i-1}(\cdot)\mu_i^B(\cdot)\mu_{i+1}(\cdot)\dots\mu_N(\cdot).$$

Определение 3. Ситуацию $\mu^*(\cdot) \in M$ назовем *удовлетворяющей условию квазиравновесия по Бержу-Вайсману в игре* Г, если для любых чистых стратегий $x_j \in X_j$ ($j \in \mathbb{N}$, $j \neq i$) справедлива система неравенств

$$\tilde{f}_i(x \parallel \mu_i^*) \leq \tilde{f}_i(\mu^*) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

где использованы

$$(x \parallel \mu_i^*) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \mu_i^*(\cdot), x_{i+1}, \dots, x_N)$$

и квазисмешанное расширение функции выигрыша i-го игрока

$$\tilde{f}_i(x \parallel \mu_i^*) = \int\limits_{X_i} f_i(x)\mu_i^*(dx_i) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Замечание 6. Чистые стратегии x_i являются частным случаем смешанных стратегий μ_i, $i \in \mathbb{N}$ (в случае, когда смешанная стратегия совпадает с функцией Дирака). Следовательно, если в игре Г существует ситуация в смешанных стратегиях, удовлетворяющая условию равновесия по Бержу-Вайсману, то в этой игре существует и ситуация в смешанных стратегиях, удовлетворяющая условиям квазиравновесия по Бержу-Вайсману.

Теорема 2. *Пусть в игре* Г *множества* X_i *– непустые компакты, функции* $f_i(x)$ *непрерывны на* X ($i \in \mathbb{N}$)*. Тогда существует ситуация* $\mu^*(\cdot) \in M$*, удовлетворяющая условию квазиравновесия по Бержу-Вайсману.*

Доказательство. Если множества X_i – непустые компакты, функции $f_i(x)$ непрерывны на X $(i \in \mathbb{N})$, то функция $\Phi(x, z)$ непрерывна на произведении компактов $X \times X$ и поэтому имеет седловую точку в смешанных стратегиях. Следовательно, (аналогично теореме 1) игра $\tilde{\Gamma}$ имеет ситуацию $\mu^B(\cdot) \in M$ в смешанных стратегиях, удовлетворяющую условию равновесия по Бержу-Вайсману. Тогда (замечание) в игре Γ существует и ситуация в смешанных стратегиях $\mu^*(\cdot)$, удовлетворяющая условию квазиравновесия по Бержу-Вайсману. □

3. Комментарии

Используемое в статье понятие равновесия (определение 1) впервые было предложено Вайсманом Константином Семеновичем в начале 1994 года на научном семинаре (руководитель – профессор Жуковский В.И.) и в этом же году опубликовано в [1]. Как пояснял сам Константин Семенович, название "равновесие по Бержу" выбрано им потому, что в монографии К. Бержа [2] это определение "спрятано между строк" (хотя явно и не формулируется). Необходимо отметить, что систему неравенств (1) естественней было бы назвать "условием равновесности по Бержу", само же определение ("равновесная по Бержу ситуация") формализовано К.С. Вайсманом в виде одновременного выполнения двух требований: неравенств (1) и условий индивидуальной рациональности для каждого игрока (в диссертации [3] построен пример выполнения неравенств (1) при нарушении условия индивидуальной рациональности для отдельных игроков). По нашему мнению, идея применения неравенств (1) отвечает замечательной черте характера самого Константина Семеновича – "помогать всем окружающим, забывая о своих интересах". Такой подход прямо противоположен лозунгу "заботься только о себе", отражающему общепринятую концепцию равновесия по Нэшу. Более того, К.С. Вайсман в [3] построил пример бескоалиционной игры, в которой отсутствует ситуация равновесия по Нэшу (тем самым вопрос об использовании равновесной по Нэшу ситуации в качестве решения указанной игры вообще снимается), но существует равновесная по Бержу ситуация. Наконец, в [3] для двух классических задач теории игр ("дилемма заключенного" и "охрана окружающей среды") показано, что в ситуации равновесия по Бержу выигрыши игроков лучше (больше), чем в ситуации равновесия по Нэшу. Данные исследования, а также теоретические основы равновесия по Бержу в бескоалиционных играх при неопределенности и составили основу кандидатской диссертации [3] Константина Семеновича, защищенной им в Санкт-Петербургском государственном университете в 1995 г. До момента своей скоропостижной кончины (умер в 35 лет 10 марта 1998 г.) Вайсман К.С. активно и всесторонне исследовал введенное им равновесие, опубликовав по этой теме свыше 20 работ, привлек к своим исследованиям отечественных математиков (Житомирский Г.И., Жуковский В.И., Кузютин Д.К., Молоствов В.С. и др). Основные публикации того времени – [4, 5, 6]. Исследования Вайсмана К.С. были продолжены в [7], затем получили свое развитие в работах Abalo K.Y. и Kostreva M.M. [8, 9, 10]. В последних вводится более общее понятие, включающее в себя равновесие по Бержу в определении Вайсмана К.С. как важный частный случай. Исходя из сказанного выше, авторы статьи посчитали себя вправе назвать используемое понятие условием равновесия по Бержу-Вайсману.

Список литературы

[1] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Vaisman K.S. *The Berge equilibrium* // Preprint. Tbilisi: Institute of Control Systems. 1994.

[2] Берж К. *Общая теория игр нескольких лиц.* М.: Физматгиз, 1961.

[3] Вайсман К.С. *Равновесие по Бержу*: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПбГУ, 1995.

[4] Вайсман К.С. *Равновесие по Бержу*//В кн. Жуковского В.И., Чикрия А.А. "Линейно-квадратичные дифференциальные игры". Киев, Наукова Думка, 1994. С. 119-143.

[5] Vaisman K.S. *Nash Equilibriums Routing and Ring Networks*//Game Theory and Application, III, 1997. P. 147-160.

[6] Zhukovskiy V. I., Molostvov V.S., Vaisman K.S. *Non-cooperative Games under Uncertainty*//Game Theory and Application, III, 1997. P. 189-222.

[7] Radjef M.S. *Sur l'existence d'un equilibre de Berge pour un jeu differentiel a n-personnes*//Chahier Mathematiques de l'universit d'Oran, 1, 1998. P. 89-93.

[8] Abalo K.Y., Kostreva M.M. *Equi-well-posed games*//Journal of Optimization Theory and Application, 89, 1996. P. 89-99.

[9] Abalo K.Y., Kostreva M.M. *Some existence theorems of Nash and Berge equilibria*//Applied Mathematics Letters, 17, 2004. P. 569-573.

[10] Abalo K.Y., Kostreva M.M. *Berge equilibrium: some recent results from fixed-point theorems*//Applied Mathematics and Computational, 169, 2005. P. 624-638.

Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности
ул. Народного ополчения, д. 38, корп. 2, 123298, Москва, Россия
E-mail: ulya_zhiteneva@mail.ru, rzitlpoz@rambler.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 519.833 MSC2000: 27.47.19

В.И. Жуковский, Л.В. Смирнова

ДВУХУРОВНЕВАЯ ИГРА С БЕСКОАЛИЦИОННЫМ ВАРИАНТОМ НА НИЖНЕМ УРОВНЕ ИЕРАРХИИ

1. Формализация

Рассмотрим двухуровневую иерархическую игру, содержащую один элемент верхнего уровня - центр и N элементов нижнего уровня - подсистем. Центр совершает ход первым, именно, выбирает свое управляющее воздействие (стратегию) u из заданного множества $U \subset \mathbb{R}^m$ и сообщает об этом каждой подсистеме нижнего уровня. Затем i-ая подсистема формирует некоторую свою стратегию $x_i(\cdot) \in X_i^u$, $x_i(u) \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $\forall u \in U$, где X_i^u - множество управлений i-ой подсистемы, предопределенное действиями $u \in U$ центра. Таким образом, центр может ограничивать возможности подсистем нижнего уровня. Управляющее воздействие центра $u \in U$ и вектор управлений подсистем $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X = \prod\limits_{i=1}^{N} X_i$ однозначно определяет состояние (ситуацию) всей системы (игры) - $(x, u) \in X \times U$. На множестве ситуаций определены скалярные критерии эффективности (функции выигрыша) центра - $f_0(x, u) : X \times U \to \mathbb{R}$, и каждой i-ой подсистемы - $f_i(x, u) : X \times U \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$ соответственно. Заметим, что функция выигрыша i-ой подсистемы зависит не только от управляющего воздействия центра u, но и от стратегии $x_i(u)$ каждой из подсистем нижнего уровня иерархии ($i \in \mathbb{N}$). Будем считать, что центр и подсистемы при выборе управления стремятся увеличить свои критерии эффективности (функции выигрыша). Кроме этого, предположим, что среди подсистем нижнего уровня образование коалиций либо невозможно, либо запрещено правилами ведения игры, то есть подсистемы действуют изолированно. Таким образом, в данной статье будем рассматривать иерархическую систему с бескоалиционным вариантом игры на нижнем уровне. В этом случае будем считать, что выбор стратегий подсистем нижнего уровня продиктован также стремлением к достижению одной из равновесных ситуаций, например, равновесия по Нэшу. Поэтому, помимо сделанных предположений, будем далее полагать, что центр обладает информацией о критериях и множествах стратегий игроков нижнего уровня иерархии, а также считаем, что выбор ими стратегий определяется стремлением к увеличению своего критерия, а всем вместе - к достижению равновесной по Нэшу ситуации.

На основе сделанных предположений формализуем понятие решения для указанной иерархической игры. Под контрстратегией i-ой подсистемы в ответ на стратегию u центра будем понимать вектор-функцию $x_i(\cdot)$, ставящую в соответствие каждому элементу $u \in U$ вектор $x_i(u) \in X_i^u$, то есть $x_i(\cdot) : U \to X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$. Будем полагать, что компоненты этой вектор-функции измеримы по Борелю на множестве $U \subset \mathbb{R}^m$ и обозначим множество всех контрстратегий i- ой подсистемы через $\mathcal{B}(U, X_i)$, $i \in \mathbb{N}$.

С учетом введенных обозначений рассматриваемая иерархическая игра определяется упорядоченной пятеркой:

$$\Gamma = \langle \{\mathbb{N}, \{0\}\}, U, \{\mathcal{B}(U, X_i)\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_j(x, u)\}_{j \in \{0, \mathbb{N}\}} \rangle.$$

Зафиксируем в игре Γ произвольную стратегию $u \in U$ центра и рассмотрим после этого бескоалиционную игру N лиц:

$$\Gamma(u) = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(x, u)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

Обозначим через $x^e(u)$ равновесную по Нэшу ситуацию, определяемую системой равенств

$$\max_{x_i \in X_i^u} f_i(x^e(u) \parallel x_i, u) = f_i(x^e(u), u) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

здесь $(x^e(u) \parallel x_i) = (x_1^e(u), \dots, x_{i-1}^e(u), x_i, x_{i+1}^e(u), \dots, x_N^e(u))$.

Пусть теперь задано априори некоторое число $\varepsilon \geq 0$.

Определение. Стратегию центра u_ε^* назовем ε-оптимальной в игре Γ, если

$$f_0(x^e(u_\varepsilon^*), u_\varepsilon^*) + \varepsilon \geq f_0(x^e(u), u) \quad \forall u \in U.$$

Перед тем как установить существование ε-оптимального решения игры Γ приведем ряд вспомогательных положений.

2. Вспомогательные утверждения

Далее, не оговаривая особо, полагаем, что в игре Γ множества X_i $(i \in \mathbb{N})$, U суть компакты, причем X_i выпуклы и $f_j(x, u)$ $(j = 0, 1, \dots, N)$ непрерывны на $X \times U$.

Рассмотрим многозначное отображение $X^e(\cdot) : U \to X$, которое определяется следующим образом: для каждого $u \in U$

$$X^e(u) = \{x^e(u) | \max_{x_i \in X_i^u} f_i(x^e(u) \parallel x_i, u) = f_i(x^e(u), u), \ \ i \in \mathbb{N}\}. \tag{1}$$

Согласно теореме Нэша-Неймана [1], множество $X^e(u)$ непусто при каждом $u \in U$ при выполнении следующих двух условий:

Условие 1. Множества $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ и $U \subset \mathbb{R}^m$ непустые компакты, причем X_i выпуклы.

Условие 2. Непрерывные функции выигрыша $f_i(x, u)$ вогнуты по x_i при каждых $(x_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}, u) \in X_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} \times U$ $(i \in \mathbb{N})$.

Здесь $x_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in X_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} = \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{N} X_j$.

В [2] установлено, что множество $X^e(u)$ при каждом $u \in U$ является компактным подмножеством множества X, а многозначное отображение $X^e(\cdot)$ полунепрерывно сверху по включению при изменении $u \in U$. Тогда при выполнении условий 1 и 2 (по теореме об измеримом выборе [3]) существует изеримый о Борелю селектор $x^e(\cdot)$ многозначного отображения $X^e(\cdot)$, то есть существует измеримая по Борелю вектор-функция $x^e(u) \in X^e(u)$, которая при каждой стратегии $u \in U$ и каждом $i \in \mathbb{N}$ реализует равенства из (2).

3. Теорема существования

Теорема. *При выполнении условий 1 и 2 для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* ε*-оптимальная стратегия* $u_\varepsilon^* \in U$ *игры* Γ.

Доказательство. Пусть $x^e(\cdot)$ некоторый измеримый по Борелю селектор многозначного отображения $X^e(\cdot)$. Так как функция $f_0(x, u)$ непрерывна, то функция $f_0(x^e(u), u)$ (как суперпозиция измеримой и непрерывной функций) будет измерима по Борелю. Множество U является компактным, тогда функция $f_0(x^e(u), u)$ будет ограничена на U и, следовательно, существует $\sup\limits_{u \in U} f_0(x^e(u), u)$, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $u_\varepsilon^* \in U$, для которого

$$f_0(x^e(u_\varepsilon^*), u_\varepsilon^*) + \varepsilon \geq f_0(x^e(u), u) \quad \forall u \in U,$$

что и доказывает теорему. $\square$

Список литературы

[1] Воробьев Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры* М.: Наука, 1984.

[2] Жуковский В.И. *Конфликты и риски* М.: РосЗИТЛП, 2007.

[3] Аркин В.И., Левин В.Л. *Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи* // Успехи математических наук. 1972. 27, № 3. с. 21-77.

Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности
ул. Народного ополчения, д. 38, корп. 2, 123298, Москва, Россия
E-mail: fozroszitlp@rambler.ru, rzitlpoz@rambler.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.9 MSC2000: 34G20

Н.Б. Журавлев

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

В данной работе рассматривается вопрос существования рациональной аппроксимациии периодического решения нелинейного функционально-дифференциального уравнения. Само периодическое решение считается известным. Этот вопрос возник в связи с описанием динамики, порождаемой нелинейными функционально-дифференциальными уравнениями, где особую роль играют гиперболические решения. Свойство гиперболичности решения определяется в терминах собственных значений оператора монодромии [1]. Трудность заключается в исследовании этих собственных значений, поскольку оператор монодромии оказывается бесконечномерным. Наиболее эффективным методом, позволяющим находить собственные значения оператора монодромии и их алгебраические кратности, является сведение этих задач к решению вспомогательных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 3, 4, 5]. До недавнего времени не представлялось возможным использовать такой подход в случае, если период не соизмерим с запаздыванием. Однако, это удалось сделать (см. [4]). При этом предполагалось все же, что исследуемое периодическое решение допускает рациональную аппроксимацию. Мы будем работать с определением рациональной аппроксимации, предложенным в работе [5], где решения с периодом, несоизмеримым с запаздываниями также исследуются. В данной работе доказывается (см. теорему 2), что любое периодическое решение допускает рациональную аппроксимацию.

Рассмотрим уравнение

$$x'(t) = f(x(t), x(t-r_1), \dots, x(t-r_n)), \tag{1}$$

где функция $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ является непрерывной вместе со всеми производными первого порядка, а запаздывания $r_i \in \mathbb{Q}_+$ являются положительными рациональными числами. Мы будем предполагать также, что

$$\|f\|_{C^1(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})} = \sup_{y\in\mathbb{R}^{n+1}} \max\{f(y), \partial_1 f(y), \dots, \partial_{n+1} f(y)\} < \infty,$$

где $\partial_i f(y_1, \dots, y_{n+1}) = \partial f(y_1, \dots, y_{n+1})/\partial y_i$. Определяющую роль играют значения этой функции на ограниченном множестве, поэтому указанное ограничение не является существенным.

Мы будем изучать T-периодическое решение $\tilde{x}$ уравнения (1). Само решение $\tilde{x}$ считается известным. Очевидно, функция $\tilde{x}$ удовлетворяет уравнению

$$x'(t) = G(x(t), x(t-r_1), \dots, x(t-r_{n_A})), \tag{2}$$

где натуральное число $n_A \geqslant n$ и положительные рациональные запаздывания r_i $(i = n+1, \dots, n_A)$ произвольны, а функция $G \in C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$ определена по формуле

$$G(y_0, \dots, y_{n_A}) = f(y_0, \dots, y_n). \tag{3}$$

Положим $r = \max\{r_i,\ i = 1, \dots, n_A\}$.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00268)

Определение 1. Мы будем говорить, что решение $\tilde{x}$ уравнения (1) допускает рациональную аппроксимацию, если для некоторого числа $n_A \in \mathbb{N}$ $(n \leqslant n_A)$ найдутся такие числа $0 < r_i \in \mathbb{Q}$ $(i = n+1, \dots, n_A)$ и такая последовательность $\{G_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C^1(\mathbb{R}^{n_A+1}, \mathbb{R})$, что

$$\|G_k - G\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_A+1},\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty \tag{4}$$

и уравнения

$$x'(t) = G_k(x(t), x(t-r_1), \dots, x(t-r_{n_A})) \tag{5}$$

имеют T_k-периодические решения $\tilde{x}_k(t)$ такие, что

$$\|\tilde{x}_k - \tilde{x}\|_{C[-r,0]} \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{6}$$

$$|T_k - T| \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{7}$$

где T_k — рациональные числа, функция G определена по формуле (3).

Пусть функция $\overline{x} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определена по формуле $\overline{x}(t) = \tilde{x}(\beta t)$. Тогда $\overline{x}$ является решением уравнения

$$x'(t) = \beta f(x(t), x(t - r_1/\beta), \dots, x(t - r_n/\beta))$$

(это проверяется непосредственной подстановкой и заменой переменной по формуле $\beta t = s$). В таком случае, $\overline{x}$ является также решением уравнения

$$x'(t) = \beta f(x(t), x(t-r_1) + \Delta(t,1,\beta), \dots, x(t-r_n) + \Delta(t,n,\beta)),$$

где $\Delta(t,i,\beta) = \overline{x}(t - r_i/\beta) - \overline{x}(t - r_i) = \tilde{x}(\beta t - r_i) - \tilde{x}(\beta t - \beta r_i)$. Пусть числа $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < q_i \in \mathbb{Q}$, $i = 2, \dots, n_0$ и $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$, а также семейство функций $W(\cdot, \dots, \cdot, i, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$ определены в соответствии со следующей теоремой при $x = \tilde{x}$.

Теорема 1. *Для любой T-периодической функции $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $(x \neq \mathrm{const})$ найдутся такие числа $1 < \beta_0 \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < q_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 2, \dots, n_0)$, при которых найдется такое семейство функций $W(\cdot, \dots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$, что для любой пары $(\beta, p) \in [1, \beta_0] \times \mathbb{R}$ имеет место соотношение*

$$W(x(\beta t), x(\beta t - \beta q_2), \dots, x(\beta t - \beta q_{n_0}), p, \beta) = x(\beta t - \beta p) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

и оператор $\overline{W} : \mathbb{R} \times [1, \beta_0] \to C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$, действующий по формуле $\overline{W}(p, \beta)(y_1, \dots, y_{n_0}) = W(y_1, \dots, y_{n_0}, p, \beta)$, непрерывен.

Данное утверждение является частным случаем теоремы [5, Теорема 2.3].

Легко проверить, что при $\beta \in [1, \beta_0]$, $q_1 = 0$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\begin{gathered}\Delta(t,i,\beta) = W(\tilde{x}(\beta t - \beta q_1), \dots, \tilde{x}(\beta t - \beta q_{n_0}), r_i/\beta, \beta) - \\ - W(\tilde{x}(\beta t - \beta q_1), \dots, \tilde{x}(\beta t - \beta q_{n_0}), r_i, \beta).\end{gathered}$$

Определим семейство функций $F(\cdot, \dots, \cdot, p, \beta) \in C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})$ по формуле

$$F(y_1, \dots, y_{n_0}, p, \beta) = W(y_1, \dots, y_{n_0}, p/\beta, \beta) - W(y_1, \dots, y_{n_0}, p, \beta).$$

Из теоремы 1 следует, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\begin{gathered}F(\overline{x}(t - q_1), \dots, \overline{x}(t - q_{n_0}), r_i, \beta) = \Delta(t,i,\beta) \qquad (t \in \mathbb{R}), \\ \|F(\cdot, \dots, \cdot, r_i, \beta)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0},\mathbb{R})} \to 0 \text{ при } \beta \to 1.\end{gathered}$$

Определим функцию $G \in C^1(\mathbb{R}^{n_0+n}, \mathbb{R})$ по формуле

$$G(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2 \dots, y_{n_0}) = f(y_1, z_1, \dots, z_n),$$

где $n_0 \in \mathbb{N}$ определено выше.

Поставим в соответствие каждому числу $k \in \mathbb{N}$ такое число $\beta_k \in [1, \beta_0]$, что $0 < \beta_k - 1 < 1/k$ и $\beta_k T \in \mathbb{Q}$. Пусть

$$\begin{gathered}G_k(y_1, z_1, \dots, z_n, y_2 \dots, y_{n_0}) = \\ = \beta_k f(y_1, z_1 + F(y_1, \dots, y_{n_0}, r_1, \beta_k), \dots, z_n + F(y_1, \dots, y_{n_0}, r_n, \beta_k)),\end{gathered} \tag{8}$$

где функция F определена выше.

Лемма 1. *Функции G_k, определенные по формуле* (8) *удовлетворяют определению* 1 *при* $n_A = n_0 + n - 1$ *и* $0 < r_i = q_{i-n+1}$, $i = n+1, \ldots, n_A$.

Доказательство. Рассмотрим при $i \in \{2, \ldots, n_0\}$ производные

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i} G_k(y_1, z_1, \ldots, z_n, y_2, \ldots, y_{n_0})\right| = \left|\beta_k \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} f(y_1, z_1 + F(y_1, \ldots, y_{n_0}, r_1, \beta_k), \ldots, z_n + \right.$$

$$\left. + F(y_1, \ldots, y_{n_0}, r_n, \beta_k)) \frac{\partial}{\partial y_i} F(y_1, \ldots, y_{n_0}, r_j, \beta_k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant n\beta_k \|f\|_{C^1(\mathbb{R}^{n+1})} \max_{j=1,\ldots,n} \|F(\cdot, \ldots, \cdot, r_j, \beta_k)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})}.$$

Поскольку $\beta_k \to 1$ при $k \to \infty$, имеем $\|F(\cdot, \ldots, \cdot, r_i, \beta_k)\|_{C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})} \to 0$. Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G_k(y_1, z_1, \ldots, z_n, y_2, \ldots, y_{n_0}) \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty.$$

Аналогично получается, что при $k \to \infty$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} G_k(y_1, z_1, \ldots, z_n, y_2 \ldots, y_{n_0}) \to \frac{\partial}{\partial y_1} f(y_1, z_1, \ldots, z_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} G_k(y_1, z_1, \ldots, z_n, y_2 \ldots, y_{n_0}) \to \frac{\partial}{\partial z_j} f(y_1, z_1, \ldots, z_n) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, из сходимости $\|F(\cdot, \ldots, \cdot, r_i, \beta_k)\|_{C(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R})} \to 0$ при $k \to \infty$ следует сходимость (4).

Поскольку $\beta_k \in [1, \beta_0]$, имеем

$$G_k(\tilde{x}(\beta_k t), \tilde{x}(\beta_k t - \beta_k r_1), \ldots, \tilde{x}(\beta_k t - \beta_k r_n), \tilde{x}(\beta_k t - \beta_k q_2), \ldots, \tilde{x}(\beta_k t - \beta_k q_{n_0})) =$$

$$= \beta_k f(\tilde{x}(\beta_k t), \tilde{x}(\beta_k t - r_1), \ldots, \tilde{x}(\beta_k t - r_n)).$$

Тогда, подставляя функцию $x(t) = \tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(\beta_k t)$ в урравнение (5), получаем

$$\frac{d\tilde{x}(\beta_k t)}{dt} = \beta_k f(\tilde{x}(\beta_k t), \ldots, \tilde{x}(\beta_k t - r_n)).$$

Последнее равенство является тождеством, т. к. $\tilde{x}$ является решением уравнения (1). Следовательно, $\tilde{x}_k$ является решением уравнения (5). При этом каждая функция $\tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(\beta_k t)$ имеет период $T/\beta_k \in \mathbb{Q}$. Наличие свойств (6) и (7) очевидно. □

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Любое периодическое решение уравнения* (1) *допускает рациональную аппроксимацию, понимаемую в смысле определения* 1.

Список литературы

[1] Hale J. K. *Theory of functional differential equations*// Springer. New York. – 1977.

[2] Chow S. N., and Walther H.-O. *Characteristic multipliers and stability of symmetric periodic solutions of $\dot{x}(t) = g(x(t-1))$*)// Transactions of the A.M.S. – 1988. – V. 307. – P. 127-142.

[3] Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л. *О мультипликаторах Флоке для медленно осциллирующих периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений*// Труды Московского Математического Общества – 2003. – Т. 64. – С. 3-53.

[4] Skubachevskii A. L., Walther H.-O. *On the Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations*// J. Dynam. Differential Equations – 2006. – V. 18, № 2. – P. 257-355.

[5] Журавлев Н. Б. *Критерий гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями*// Современная математика. Фундаментальные направления – 2007. – Т. 21. – С. 37-61.

Российский Университет Дружбы Народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, Москва, Россия
E-mail: `Zhuravlev1980@yandex.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 519.64

Ле Хай Чунг, С.П. Зубова

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КОНТРОЛЬНЫХ ТОЧЕК И ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

1. Введение

Для полностью управляемой динамической системы

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + \mathcal{D}u(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m; B,\ \mathcal{D}$ - матрицы соответствующих размеров, $t \in [0,T]$, требуется найти управление $u(t)$, переводящее состояние $x(t)$ из произвольного начального состояния x^0 в произвольное конечное x^T при условии прохождения "траектории" $x(t)$ через k ($k \in \mathbb{N}$) произвольных контрольных точек и при допонительных ограничениях на $u(t)$ и его производные при $t = t_i,\ i = \overline{0, k+1},\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_k < t_{k+1} = T$.

В монографиях [1], [2] и др. для системы (1) с условиями

$$x(0) = x^0,\ x(T) = x^T. \tag{2}$$

функция $u(t)$ построена в виде

$$u(t) = \mathcal{D}^* e^{tB^*} (\int\limits_0^T e^{-sB}\mathcal{D}\mathcal{D}^* e^{sB^*} ds)^{-1} (e^{-TB}x^T - x^0).$$

В работе [3] управляющая функция строится в виде

$$u(t) = \mathcal{D}_p^+ e^{tB_p} P_r(t),$$

где $P_r(t)$ - многочлен по степеням t, матрицы $\mathcal{D}_p^+,\ B_p$ описаны ниже (см в разделе 2).

Однако наличие матричных экспонент в $u(t)$ иногда затрудняет дальнейшее исследование свойств $u(t),\ x(t)$ и их практическое построение, в силу этого представляет интерес нахождение $x(t)$ и $u(t)$ в виде многочленов по степеням t. Это позволяет находить и оптимальное управление и оптимальную траекторию в классе гладких функций. Для этого достаточно построить $x(t)$ и $u(t)$ в виде многочленов более высокого порядка и затем провести исследование $x(t)$ и $u(t)$ по дополнительным параметрам.

А. Эйлоном в 1986г. для системы (1) с условиями (2) было доказано, что существует $u(t)$ в виде многочлена степени меньшей, чем $2n$. А в работе [4] доказывается, что "управление может быть представлено многочленом степени M=2r+1, где $r = n - rank\mathcal{D}$. Очевидно, что $M < 2n$ (действительно, поскольку система управляема, то, следовательно, $rank\mathcal{D} > 0$)."

Следующий пример показывает, что и этот результат может быть уточнен. Для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u_3 \end{cases}$$

с условиями $x_i(0) = x_i^0,\ x_i(T) = x_i^T,\ i = \overline{1,4}$ имеем: $n = 4,\ rank\mathcal{D} = 2,\ M = 5$, то есть существует $u_1(t) = P_5(t), u_3(t) = P_5(t)$ ($P_i(t)$ здесь и далее многочлен по степеням t

порядка i с векторными коэффициентами). Но эта система состоит из двух независимых систем

$$\begin{cases} \dot{x}_j = x_{j+1} \\ \dot{x}_{j+1} = u_j, \end{cases}$$

$x_i(0) = x_i^0,\ x_i(T) = x_i^T,\ j = 1, 3;\ i = \overline{1,4}$. Для каждой системы $n = 2,\ rank\mathcal{D} = 1,\ M = 3$, следовательно существуют $u_1(t) = P_3(t),\ u_3(t) = P_3(t)$.

В работе [5] для системы (1)-(2) с дополнительным условием $x(\tau) = x^\tau,\ 0 < \tau < T$, строится $x(t) = P_{3p+2}(t)$, где $p = min\ q$, а q таково, что

$$rank(\mathcal{D}\ B\mathcal{D} ... B^q\mathcal{D}) = n. \tag{3}$$

При этом находится $u(t) = P_k(t),\ k \le 3p + 2$.

В случае отсутствия условия $x(\tau) = x^\tau$ соответствующие многочлены имеют порядок не выше $2p+1$. Заметим, что $M = 2p+1$ в том и только в том случае, когда каждая матрица управляемости содержит точно один линейно независимый вектор, точнее, когда

$$rank(\mathcal{D}\ B\mathcal{D} ... B^i\mathcal{D}) = i + 1,\ i = \overline{0, n-1}.$$

В остальных случаях $2p + 1 < M$.

2. Постановки

В работе [3] доказано, что система (1)-(2) является полностью управляемой в том и только том случае, когда существует $q \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{D}_q$ съюрективен (то есть $Q_q = 0$) и p - наименьшее

В данной работе рассматривается более общая задача управления. Требуется, чтобы $x(t)$ в любых заданных значениях t_i принимал произвольно заданные значения

$$x(t_i) = x_{0i}^0,\ i = \overline{0, k+1},\ k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

На $u(t)$ накладываются ограничения

$$D_{j_i} u(t_i) = u_i^{j_i},\ j_i = \overline{0, r_i},\ i = \overline{0, k+1}, \tag{5}$$

где $u_i^{j_i}$ - произвольно заданные векторы, D_s - производная по t порядка s. Требуется построить $x(t)$ и $u(t)$ в виде многочленов, удовлетворяющих (1), (4), (5).

Такие задачи возникают при нахождении гладкого управления динамической системой с условием прохождения "траектории" $x(t)$ через контрольные точки (t_i, x_{0i}^0), при контроле за управлением в моменты t_i, например, в задачах о движении объекта с мягкой стыковой и т.д. ... .

Заметим, что условия (4), (5) приводят с помощью соотношения (1) к условиям

$$D_{j_i} x(t_i) = Bx_{0i}^{j_i - 1} + \mathcal{D}u_i^{j_i - 1} \stackrel{des}{=} x_{0i}^{j_i}, \tag{6}$$

$i = \overline{0, k+1},\ j_i = \overline{0, r_i + 1}$.

3. Исследование

Для построения $x(t)$ и $u(t)$ применим метод каскадного расщепления уравнения (1) на уравнения в подпространствах, разработанный в работе [3], несколько модифицируя его. Используется

Лемма 1. *Если $C \in L(\mathbb{R}^s,\ \mathbb{R}^\nu)$, то*

$$\mathbb{R}^s = imC^T \dotplus kerC,\ \mathbb{R}^\nu = imC \dotplus kerC^T \tag{7}$$

и уравнение $Cv = w$ разрешимо относительно v тогда и только тогда, когда $Qw = 0$. Тогда $v = C^+w + \mathcal{P}v$, где Q и $\mathcal{P}$ - проекторы на $kerC^T$ и $kerC$ соответственно, отвечающие разложениям (7), $C^+ = \widetilde{C}^{-1}(I - Q)$, $\widetilde{C}^{-1}$ - обратная матрица к сужению $\widetilde{C}$ матрицы C на imC^T, I - здесь и далее единичная матрица в соответствующем подпространстве, $\mathcal{P}v$ - произвольной элемент из $kerC$.

Применение этого результата с $C = \mathcal{D}$ к уравнению (1) дает: уравнение (1) разрешимо относительно $u(t)$ в том и только том случае, когда выполняется условие

$$Q\dot{x}(t) = QBx(t). \tag{8}$$

При выполнении этого условия имеем:

$$u(t) = \mathcal{D}^{+}\dot{x}(t) - \mathcal{D}^{+}Bx(t) + \mathcal{P}u(t),$$

где $\mathcal{P}u(t)-$ произвольная вектор-функция из $ker\mathcal{D}$.

Соотношение (8) преобразуется к виду

$$Q\dot{x}(t) = QBQ(Qx(t)) + QB(I-Q)(I-Q)x(t). \tag{9}$$

Обозначим: $Qx(t) = x_1(t),\ (I-Q)x(t) = y_1(t),\ QBQ = B_1,\ QB(I-Q) = \mathcal{D}_1$. Теперь (9) имеет вид:

$$\dot{x}_1(t) = B_1x_1(t) + \mathcal{D}_1y_1(t), \tag{10}$$

аналогичный (1), но с матрицами $B_1,\ \mathcal{D}_1$, действующими в подпространствах.

Условия (6) и соотношение (8) приводят к условиям

$$D_{j_i}x_1(t_i) = Qx_{0i}^{j_i} \overset{des}{=} x_{1i}^{j_i}, \tag{11}$$

$i = \overline{0, k+1},\ j_i = \overline{0, r_i+2}$.

Таким образом, равенство (1) с условиями (4), (5) эквивалентно соотношениям

$$u(t) = \mathcal{D}^{+}\dot{x}(t) - \mathcal{D}^{+}Bx(t) + \mathcal{P}u(t), \tag{12}$$

$$x(t) = x_1(t) + y_1(t), \tag{13}$$

$$\dot{x}_1(t) = B_1x_1(t) + \mathcal{D}_1y_1(t), \tag{14}$$

с условиями (11). Здесь $\mathcal{P}u(t)$ - произвольная вектор-функция из $ker\mathcal{D}$, удовлетворяющая условиям

$$D_{j_i}(\mathcal{P}u(t_i)) = \mathcal{P}u_i^{j_i}, \tag{15}$$

$i = \overline{0, k+1}, j_i = \overline{0, r_i}$.

Элемент $\mathcal{P}u(t)$ можно найти в виде $P_r(t)$, где $r = \sum\limits_{i=0}^{k+1} r_i$, так как справедлива

Лемма 2. *Существует многочлен $P_s(t)$, удовлетворяющий условиям*

$$D_{j_i}P_s(t_i) = a_i^{j_i},\ i = \overline{0, k+1},\ j_i = \overline{0, \nu_i}, \tag{16}$$

где $s = k + 2 + \sum\limits_{i=0}^{k+1} \nu_i$.

Действительно, для $P_s(t) = \sum\limits_{i=0}^{s} b_it^i$ из условий (16) при $t_0 = 0$ получаем:

$$b_i = \frac{1}{(j_0)!}a_0^{j_0},\ i = \overline{0, \nu_0}.$$

Теперь $P_s(t) = F(t) + \sum\limits_{i=\nu_0+1}^{s} b_it^i$, где $F(t) = \sum\limits_{i=0}^{\nu_0} \frac{1}{(j_0)!}a_0^{j_0}t^i$.

Для нахождения остальных коэффициентов b_i из условий (16) получаем систему

$$\begin{aligned} b_{\nu_0+1}t_i^{\nu_0+1} + b_{\nu_0+2}t_i^{\nu_0+2} + ... + b_st_i^s = a_i^0 \\ (\nu_0+1)b_{\nu_0+1}t_i^{\nu_0} + (\nu_0+2)b_{\nu_0+2}t_i^{\nu_0+1} + ... + sb_st^{s-1} = a_i^1 \\ ... \\ \frac{(\nu_0+1)!}{(\nu_0-\nu_i+1)}b_{\nu_0+1}t^{\nu_0-\nu_i+1} + \frac{(\nu_0+2)!}{(\nu_0-\nu_i+2)!}b_{\nu_0+2}t_i^{\nu_0-\nu_i} + ... + \frac{s!}{(s-\nu_i)!}b_st_i^{s-\nu_i} = a_i^{\nu_i} \end{aligned} \tag{17}$$

с $i = \overline{1, k+1}$. Для каждого i коэффициенты этой системы образуют $\nu_i + 1$ строк определителя Вронского для функций $t^{\nu_0+1},\ t^{\nu_0+2}, ..., t^s$ в точке t_i, и определитель всей системы (17) отличен от нуля (см. [6]).

Рассмотрим соотношение (14), где $\mathcal{D}_1 \in L(im\mathcal{D}, ker\mathcal{D})$. В силу 1

$$im\mathcal{D} = im\mathcal{D}_1^T \dotplus ker\mathcal{D}_1, \ ker\mathcal{D}^T = im\mathcal{D}_1 \dotplus ker\mathcal{D}_1^T. \tag{18}$$

Обозначим: Q_1 и $\mathcal{P}_1$ - проекторы на $ker\mathcal{D}_1^T$ и $ker\mathcal{D}_1$ соответственно, отвечающие разложениям (18), $\mathcal{D}_1^+ = \widetilde{\mathcal{D}}_1^{-1}(I - Q_1)$, $\widetilde{\mathcal{D}}_1^{-1}$- обратная матрица к сужению $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ на $im\mathcal{D}_1^T$.

Уравнение (14) разрешимо относительно $y_1(t)$ в том и только том случае, когда выполнено условие

$$Q_1\dot{x}_1(t) = Q_1B_1x_1(t). \tag{19}$$

При выполнении этого условия имеем:

$$y_1(t) = \mathcal{D}_1^+\dot{x}_1(t) - \mathcal{D}_1^+B_1x_1(t) + \mathcal{P}_1y_1(t)$$

с произвольной функцией $\mathcal{P}_1y_1(t) \in ker\mathcal{D}_1$.

Уравнение (19) преобразуется к виду

$$Q_1\dot{x}_1(t) = Q_1B_1Q_1(Q_1x_1(t)) + Q_1B_1(I - Q_1)(I - Q_1)x_1(t). \tag{20}$$

Введем обозначения: $Q_1x_1(t) = x_2(t)$, $(I - Q_1)x_1(t) = y_2(t)$, $Q_1B_1Q_1 = B_2$, $Q_1B_1(I - Q_1) = \mathcal{D}_2$, тогда (20) - это уравнение

$$\dot{x}_2(t) = B_2x_2(t) + \mathcal{D}_2y_2(t), \tag{21}$$

аналогичное (1) и (14), но в еще более "узких"подпространствах. Условия (11) и соотношение (14) приводят к условиям

$$D_{j_i}x_2(t_i) = Q_1x_{1i}^{j_i} \stackrel{des}{=} x_{2i}^{j_i}, \tag{22}$$

$i = \overline{0, k+1}$; $j_i = \overline{0, r_i + 2}$.

Отметим, что функция $x_2(t)$ должна удовлетворять на $k + 2$ большему количеству условий, чем $x_1(t)$.

Теперь уравнение (1) с условиями (4), (5) эквивалентно соотношениям:

$$u(t) = \mathcal{D}^+\dot{x}(t) - \mathcal{D}^+Bx(t) + \mathcal{P}u(t)$$
$$x(t) = x_2(t) + y_2(t) + y_1(t)$$
$$y_1(t) = \mathcal{D}_1^+\dot{x_1}(t) - \mathcal{D}_1^+B_1x_1(t) + \mathcal{P}_1y_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = B_2x_2(t) + \mathcal{D}_2y_2(t) \tag{23}$$
$$s = 1, \tag{24}$$

с условиями (22) и произвольной функцией $\mathcal{P}_1y_1(t) \in ker\mathcal{D}_1$, удовлетворяющей условиям

$$D_{j_i}\mathcal{P}_1y_1(t_i) = D_{j_i}\mathcal{P}_1(I - Q)x(t_i) = \mathcal{P}_1(I - Q)x_{0i}^{j_i}, \tag{25}$$

$i = \overline{0, k+1}$; $j = \overline{0, r_i + 1}$. В качестве $\mathcal{P}_1y_1(t)$ возьмем $\mathcal{P}_{r+k+1}$, удовлетворяющий условиям (25). Он существует в силу леммы 2.

Затем преобразуется соотношение (23) с помощью леммы 1 при $C = \mathcal{D}_2 \in L(im\mathcal{D}_1, ker\mathcal{D}_1^T)$ и так далее... . из таких q. Таким образом, установлена

Лемма 3. *Уравнение (1) с условиям (4), (5) эквивалентно системе*

$$u(t) = \mathcal{D}^+\dot{x}(t) - \mathcal{D}^+Bx(t) + \mathcal{P}u(t) \tag{26}$$
$$x(t) = x_1(t) + y_1(t) \tag{27}$$
$$y_s(t) = \mathcal{D}_s^+\dot{x_s}(t) - \mathcal{D}_s^+B_sx_s(t) + \mathcal{P}_sy_s(t) \tag{28}$$
$$x_s(t) = x_{s+1}(t) + y_{s+1}(t) \tag{29}$$
$$\dot{x_p}(t) = B_px_p(t) + \mathcal{D}_py_p(t), \ s = \overline{1, p-1} \tag{30}$$

с условиями

$$D_{j_i}x_s(t_i) = D_{j_i}Q_{s-1}x_{s-1\ i}^{j_i} \stackrel{des}{=} x_{s\ i}^{j_i}, \tag{31}$$

$i = \overline{0, k+1}$; $j_i = \overline{0, r_i + s}$, *и произвольными* $\mathcal{P}_sy_s(t) \in ker\mathcal{D}_s$, *такими, что*

$$D_{j_i}\mathcal{P}_sy_s(t_i) = D_{j_i}\mathcal{P}_s(I - Q_{s-1})x_{s-1}(t_i) = \mathcal{P}_s(I - Q_{s-1})x_{s-1\ i}^{j_i}, \tag{32}$$

$i = \overline{0, k+1}$; $j_i = \overline{0, r_i + s - 1}$.

Здесь $Q_{s-1}x_{s-1}(t) = x_s(t)$, $(I - Q_{s-1})x_{s-1}(t) = y_s(t)$, $Q_{s-1}B_{s-1}Q_{s-1} = B_s$,

$Q_{s-1}B_{s-1}(I - Q_{s-1}) = \mathcal{D}_s$, $\mathcal{D} \in L(im\mathcal{D}_{s-1}, ker\mathcal{D}^T_{s-1})$, Q_s *и* $\mathcal{P}_s$ *- проекторы на* $ker\mathcal{D}^T_s$ *и* $ker\mathcal{D}_s$*, отвечающие разложеням*

$$im\mathcal{D}_{s-1} = im\mathcal{D}^T_s \dot{+} ker\mathcal{D}_s,\ ker\mathcal{D}^T_{s-1} = im\mathcal{D}_s \dot{+} ker\mathcal{D}^T_s,$$

$\mathcal{D}^+_s = \widetilde{\mathcal{D}}^{-1}_s(I - Q_s)$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}_s$*- обратная матрица к сужению* $\widetilde{\mathcal{D}}_s$ *на* $im\mathcal{D}^T_s$.

Для построения $x(t)$ и $u(t)$ достаточно теперь построить $x_p(t)$ в виде многочлена $P_{r+(k+2)(p+1)-1}(t)$, удовлетворяющего условиям (32). Затем построить многочлен $\mathcal{P}_p y_p(t)$, удовлетворяющий (32) с $s = p$. Из соотношения (29) при $s = p-1$ найти $x_{s-1}(t)$. В качестве $\mathcal{P}_{s-1}y_{s-1}(t)$ взять многочлен, удовлетворяющий (32) при $s = p - 1$. Найти по формуле (27) с $s = p - 1$ многочлен $y_{s-1}(t)$. Из (29) с $s = p - 1$ найти x_{s-2} и так далее... . Окончательно $x(t)$ и $u(t)$ определятся по формулам (27), () с $\mathcal{P}u(t)$, полученным в лемме 1.

Итак, доказана.

Теорема 1. *Существует функция состояния* $x(t)$ *системы (1) с условиями (4), (5) в виде многочлена по степеням* t *с векторными коэффициентами порядка* $r + (k+2)(p+1) - 1$ *и функция управления u(t) в виде многочлена степени не выше* $r + (k+2)(p+1) - 1$.

Замечание 7. Для задачи без контрольных точек ($k = 0$) и без ограничений на $u(t)$ ($r = 0$) функции $x(t)$ и $u(t)$ могут быть построены в виде многочленов степени не выше $2p+1 \leq M$. Эти результаты, повидимому, не могут быть улучшены.

Замечание 8. При решении практических задач управления не обязательно строить проекторы $\mathcal{P}_i$, Q_i. Можно из уравнения (1) выразить максимально возможное количество компонент функции $u(t)$ через компоненты функции $x(t)$. Часть компонент $u(t)$ остается неопределенной, это $\mathcal{P}u(t)$. Условие разрешимости управления (1) записать в виде $\dot{x}_1 = (.)x_1 + (..)$. Это и есть уравнение $\dot{x}_1 = B_1x_1 + \mathcal{D}_1y_1$. И так далее... . При этом полученные B_1 и $\mathcal{D}_1$ могут не совпадать с B_1 и $\mathcal{D}_1$, определенными в п.1, так как имеют место и другие разложения пространств:

$$\mathbb{R}^n = coim\mathcal{D} \dot{+} ker\mathcal{D},\ \mathbb{R}^m = im\mathcal{D} \dot{+} coker\mathcal{D},$$

и соответствующие проекторы при таких разложениях определяются не единственным образом.

Однако число p (такое, что $Q_p = 0$) постоянно при разных расщеплениях пространств, о чем свидетельствует (3).

Список литературы

[1] Андреев Ю.Н. *Управление конечномерными линейными объектами*// М.: Наука, 1976.-424с.

[2] Уонэм М. *Линейные многомерные системы управления*// М.: Наука, 1980.-375с.

[3] Раецская Е.В. *Критерий полной условной управляемости сингулярно возмущенной системы. Оценки функции состояния и управляющей функции* // Кибернетика и технологии XXI века: V международ. науч.-техн.конф., Воронеж, 2004.-с.28-34.

[4] Ailon A., Langholz G. *More on the controllability of linear time-invariant systems* // Int. J. Contr. 1986. 44. №4. P. 1161-1176.

[5] Зубова С.П., Ле Хай Чунг. *Об полиномиальных управлениях линейной стационарной системой с контрольной точкой* // Современные проблемы механики и прикладной математики. Сборник трудов международной школы-семинара. Воронеж, 2007. - с. 133-136.

[6] Каган В.Ф. *Основания теории определителей* // Одесса.: Госуд. Из-во Украины, 1922.-521с.

Воронежский государственный университет
Университетская площадь, 1, Воронеж, Россия
Воронежская государственная лесо-техническая академия
E-mail: trung_zubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.98 MSC2000: 16G30,47C05

И.И.Карпенко

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АЛГЕБРЫ С КВАТЕРНИОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Введение

Классический результат теории полупростых алгебр, известный как теорема Веддерберна-Артина [1], утверждает, что всякая конечномерная простая алгебра над полем $\mathbb{F}$ изоморфна алгебре матриц над некоторой $\mathbb{F}$-алгеброй с делением (или алгебре всех линейных операторов над соответствующим конечномерным модулем). Если в качестве такого поля $\mathbb{F}$ взять поле вещественных чисел, то, согласно теореме Фробениуса, мы имеем три таких алгебры с делением: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ - алгебра кватернионов. При изучении линейных операторов, действующих в конечномерном $\mathbb{H}$-модуле, мы естественно приходим к вещественной алгебре матриц с элементами из $\mathbb{H}$. Достаточно просто построить пример, показывающий, что не для всякой вещественной алгебры существует изоморфное отображение в такую алгебру матриц.

Поэтому возникает вопрос: в каком случае простая вещественная конечномерная алгебра изоморфна алгебре матриц $M_n(\mathbb{H})$ (или, соответственно, алгебре линейных операторов, действующих в конечномерном $\mathbb{H}$-модуле). Основная задача настоящей статьи состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия существования такого изоморфизма.

Напомним, что $\mathbb{H}$ — это некоммутативная ассоциативная $\mathbb{R}$-алгебра с делением размерности 4, базисные единицы $1, i, j, k$ которой удовлетворяют следующим правилам умножения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$. При этом всякий кватернион q можно записать следующим образом: $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, $q_t \in \mathbb{R}, t = \overline{0,3}$.

1. Вещественная алгебра с кватернионной структурой

Пусть A— вещественная конечномерная алгебра с единицей e. Предположим, что существуют линейные операторы $\mathbb{I}$ и $\mathbb{J}$, действующие в этой алгебре и удовлетворяющие следующим условиям:

1. $\mathbb{I}^2 = \mathbb{J}^2 = -I$;
2. $\mathbb{I}\mathbb{J} = -\mathbb{J}\mathbb{I}$;
3. для любых элементов a, b алгебры A выполняются соотношения $\mathbb{I}(ab) = a\mathbb{I}(b)$ и $\mathbb{J}(ab) = a\mathbb{J}(b)$.

Введем следующие обозначения: $\mathbb{I}(e) = \mathbf{i}$, $\mathbb{J}(e) = \mathbf{j}$ и $(\mathbb{J}\mathbb{I})(e) = \mathbf{k}$. Из свойств данных операторов следует, что $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -e$. Кроме того, $\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}$. Действительно, $\mathbf{ij} = \mathbb{I}(e)\mathbb{J}(e) = \mathbb{J}(\mathbb{I}(e)e) = (\mathbb{J}\mathbb{I}(e)) = \mathbf{k}$. Аналогично доказываются остальные равенства.

Заметим также, что для всякого элемента $a \in A$ справедливо: $\mathbb{I}(a) = \mathbb{I}(ae) = a\mathbb{I}(e) = a\mathbf{i}$. Аналогично, $\mathbb{J}(a) = a\mathbf{j}$ и $(\mathbb{J}\mathbb{I})(a) = a\mathbf{k}$.

Рассмотрим множество $A_0 = \{x \in A \,|\, x\mathbf{i} = \mathbf{i}x, x\mathbf{j} = \mathbf{j}x\}$. Нетрудно показать, что множество A_0 есть подалгебра в A. Эту алгебру A_0 будем называть *главной подалгеброй* в A.

Введем обозначения $A_0\mathbf{i} := \mathbb{I}(A_0)$, $A_0\mathbf{j} := \mathbb{J}(A_0)$ и $A_0\mathbf{k} := (\mathbb{J}\mathbb{I})(A_0)$. Очевидно, что $A_0\mathbf{i}, A_0\mathbf{j}, A_0\mathbf{k}$ — $\mathbb{R}$ - подмодули в A.

Предложение 1. *Для $\mathbb{R}$ - модуля A имеет место разложение*

$$A = A_0 \dot{+} A_0 \boldsymbol{i} \dot{+} A_0 \boldsymbol{j} \dot{+} A_0 \boldsymbol{k}.$$

Доказательство. Докажем сначала линейную независимость $\mathbb{R}$ - подмодулей $A_0\mathbf{i}$ и $A_0\mathbf{j}$. Если $a \in A_0\mathbf{i} \cap A_0\mathbf{j}$, то $a = b\mathbf{i} = c\mathbf{j}$, $b, c \in A_0$. Умножим полученное равенство справа на $\mathbf{i}$: $-b = -c\mathbf{k}$. Теперь умножим это же равенство на $\mathbf{j}$ слева с учетом его перестановочности с элементами подалгебры A_0 : $-b = c\mathbf{k}$. Сравнивая полученные результаты, имеем: $b = 0$. Далее, если $a \in A_0 \cap A_0\mathbf{i} \dot{+} A_0\mathbf{j} \dot{+} A_0\mathbf{k}$, то $a = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, $a, b, c, d \in A_0$. Сравнивая результаты умножения этого равенства слева и справа на $\mathbf{i}$, придем к равенству $a\mathbf{i} = -b$, откуда на основании предыдущего следует $a = 0$. Аналогичными рассуждениями можно показать линейную независимость остальных подмодулей.

Пусть $a \in A$. Непосредственной проверкой можно показать, что элементы

$$a_0 = \frac{1}{4}(a - \mathbf{i} \cdot a \cdot \mathbf{i} - \mathbf{j} \cdot a \cdot \mathbf{j} - \mathbf{k} \cdot a \cdot \mathbf{k});$$

$$a_1 = -\frac{1}{4}(a \cdot \mathbf{i} + \mathbf{i} \cdot a - \mathbf{j} \cdot a \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k} \cdot a \cdot \mathbf{j});$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}(a \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot a + \mathbf{i} \cdot a \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot a \cdot \mathbf{i});$$

$$a_3 = -\frac{1}{4}(a \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k} \cdot a - \mathbf{i} \cdot a \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot a \cdot \mathbf{i}).$$

принадлежат подалгебре A_0, и $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$. □

На основании предложения 1 имеем следующее правило умножения для элементов a, b алгебры A:

$$a \cdot b = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) =$$
$$a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i +$$
$$(a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_3 + a_3 b_1) j + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k.$$

Такое правило полностью тождественно правилу умножения кватернионов, поэтому естественно такую алгебру A назвать *вещественной алгеброй с кватернионной структурой.* Аналогичным образом можно определить умножение справа элемента алгебры A на кватернион. Такое умножение на скаляр определяет на A структуру правого $\mathbb{H}$-модуля. В дальнейшем мы автоматически будем считать, что вещественную алгебру A с кватернионной структурой можно рассматривать как правый $\mathbb{H}$-модуль, обозначая его при этом как $A_{\mathbb{H}}$.

Отметим, что алгебра матриц $M_n(\mathbb{H})$ является алгеброй с кватернионной структурой. Здесь в качестве операторов $\mathbb{I}$ и $\mathbb{J}$ можно выбрать операторы, действующие на матрицу $U = ||u_{st}||$ следующим образом: $\mathbb{I}(U) = ||u_{st} i||$, $\mathbb{J}(U) = ||u_{st} j||$. Нетрудно видеть, что такие операторы удовлетворяют необходимым условиям.

2. Регулярные представления вещественной алгебры над кватернионным модулем

Пусть A – вещественная алгебра с кватернионной структурой, A_0 – главная подалгебра алгебры A, $B(A_{\mathbb{H}})$ – вещественная алгебра линейных операторов над $\mathbb{H}$-модулем $A_{\mathbb{H}}$.

Для всякого $a \in A$ рассмотрим оператор $L(a)$, действующий в $\mathbb{H}$-модуле $A_{\mathbb{H}}$ по правилу:

$$L(a)x := ax, \ x \in A_{\mathbb{H}}.$$

Определенный таким образом оператор $L(a)$ является кватернионно линейным, т.е. $L(a) \in B(A_{\mathbb{H}})$. Следовательно, мы имеем представление L вещественной алгебры A над $\mathbb{H}$-модулем $A_{\mathbb{H}}$. Такое представление назовем *левым регулярным кватернионным представлением.*

Далее, для всякого $a \in A_0$ рассмотрим оператор $R_0(a) : A_{\mathbb{H}} \to A_{\mathbb{H}}$, определенный равенством:

$$R_0(a)x := xa, \ x \in A_{\mathbb{H}}.$$

Свойства главной подалгебры также обеспечивают кватернионную линейность этого оператора.

Отображение $R_0 : A_0 \to B(A_{\mathbb{H}})$ задает представление вещественной алгебры A_0. Это представление назовем, соответственно, *правым регулярным кватернионным представлением* алгебры A_0. Операторы $L(a),\ a \in A$, равно как и операторы $R_0(a),\ a \in A_0$, образуют, как легко видеть, две подалгебры в $B(A_{\mathbb{H}})$; обозначим их соответственно через A^l и A_0^r.

Пусть H – некоторый $\mathbb{H}$- модуль, $\mathcal{A}$ – некоторая подалгебра в $B(H)$. Подмножество в $B(H)$, состоящее из операторов, перестановочных со всеми операторами из $\mathcal{A}$, мы будем называть *коммутантом* алгебры $\mathcal{A}$ и обозначать через $\overline{\mathcal{A}}$.

Как легко видеть, множество $\overline{\mathcal{A}}$ само образует подалгебру в $B(H)$. Коммутант этой новой подалгебры мы будем обозначать через $\overline{\overline{\mathcal{A}}}$ и называть *вторым коммутантом* алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, $\mathcal{A} \subseteq \overline{\overline{\mathcal{A}}}$.

Предложение 2. *Пусть A - вещественная алгебра с с кватернионной структурой. Тогда $\overline{A^l} = A_0^r$ и $\overline{A_0^r} = A^l$.*

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть $S \in \overline{A^l}$. Тогда для любого $a \in A$ справедливо $SL(a) = L(a)S$, то есть для любого $x \in A_{\mathbb{H}}$ верно $SL(a)x = L(a)Sx$ или $S(ax) = aS(x)$. Положим $x = e$. Тогда

$$Sa = aSe. \tag{1}$$

Так как S – $\mathbb{H}$-линейный оператор, то для любого $q \in \mathbb{H}$ имеем: $S(aq) = S(a)q$, или $(aq)Se = (aSe)q$. В частности, для $a = e$ получим

$$(eq)Se = (Se)q. \tag{2}$$

Пусть $Se = e_0 + e_1 i + e_2 j + e_3 k$, где $e_t \in A_0$. Полагая в равенстве (2) $q = i$, получим:

$$e_0 i - e_1 + e_2 k - e_3 j = e_0 i - e_1 - e_2 k + e_3 j,$$

откуда $e_2 = e_3 = 0$. Затем, полагая в равенстве (2) $q = j$, получим:
$e_0 j - e_1 k = e_0 j + e_1 k$, откуда $e_1 = 0$. Следовательно, $Se = e_0 \in A_0$. Из равенства (1) следует, что оператор $S \in A_0^r$.

Обратно, пусть $S \in A_0^r$, то есть $S = R(b)$, где $b \in A_0$. Тогда для любого $a \in A$, верно $L(a)R(b)x = axb = R(b)L(a)x$, то есть $S \in A^l$.

Докажем теперь второе равенство. Пусть $S \in \overline{A_0^r}$, то есть $SR(a) = R(a)S$ для любого $a \in A_0$. Таким образом, для любого $x \in A_{\mathbb{H}}$ выполняется $SR(a)x = R(a)Sx$, или $S(xa) = (Sx)a$. Полагая $x = e$, имеем $Sa = (Se)a$. Так как для любого $a \in A$, справедливо равенство $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $a_t \in A_0$, то

$$\begin{aligned} &Sa = Sa_0 + (Sa_1)i + (Sa_2)j + (Sa_3)k = \\ &(Se)a_0 + (Se)a_1 i + (Se)a_2 j + (Se)a_3 k = (Se)a. \end{aligned}$$

Следовательно, $S \in A^l$. Включение $A^l \subset \overline{A_0^r}$ очевидно. □

3. Простые вещественные алгебры с кватернионной структурой

Напомним определение простой алгебры. Нетривиальная алгебра называется *простой*, если она не содержит собственных двусторонних идеалов. Вещественная алгебра $B(H)$ всех линейных операторов, действующих в конечномерном правом $\mathbb{H}^n$-модуле H является, как известно, примером простой алгебры.

Ниже мы приводим важные теоретические результаты для кватернионных представлений конечномерных вещественных простых алгебр. Доказательства этих утверждений содержат несущественные очевидные уточнения по сравнению с комплексным случаем (см., напр., [2]).

Теорема 1. *Пусть A — простая вещественная алгебра с кватернионной структурой. Тогда справедливы утверждения:*

1. *Алгебра A обладает точным неприводимым представлением над некоторым кватернионным модулем;*

2. *Левое регулярное представление алгебры A раскладывается в прямую сумму ее неприводимых представлений.*

Обоснование приведенного ниже утверждения непосредственно опирается на результат теоремы 2, но по конструкции также ничем принципиально не отличается от аналогичного утверждения для комплексных алгебр (см., напр. [2]).

Теорема 2. *Пусть A – конечномерная вещественная простая алгебра, $\mathcal{A}$ – алгебра операторов ее точного неприводимого представления над кватернионным модулем. Тогда* $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$.

Теперь мы рассмотрим вопрос о строении коммутанта подалгебры операторов кватернионного неприводимого представления вещественной алгебры с кватернионной структурой.

Итак, пусть A – вещественная алгебра с кватернионной структурой, A_0 – главная подалгебра в A. Пусть также T — неприводимое представление этой алгебры над $\mathbb{H}$-модулем H. Для элементов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ алгебры A введем обозначения: $T(\mathbf{i}) = T_i, T(\mathbf{j}) = T_j$. В силу свойств элементов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ для этих операторов верны равенства:

$$T_i^2 = T_j^2 = -I, \tag{3}$$

$$T_iT_j = -T_jT_i. \tag{4}$$

Рассмотрим симплектические образы операторов $T(a)^s$, $a \in A$, над $\mathbb{C}$-модулем $H^{\mathbb{C}}$. Так как $T_i^2 = -I$, то $\sigma(T_i^2) = \{-1\}$. Следовательно, $\sigma(T_i) = K(i)$, где $K(i)$ — класс сопряженности числа i в теле кватернионов $\mathbb{H}$. Тогда $\sigma(T_i^s) = \{\pm i\}$, и с учетом равенства $T_i^2 = -I$ модуль $H^{\mathbb{C}}$ раскладывается в прямую сумму собственных подмодулей E_i, E_{-i} оператора T_i, соответствующих собственным значениям i, $-i$. Напомним, что при этом $E_{-i} = R_jE_i = E_ij$.

Выберем в подмодуле E_i базис $e_1, e_2, ..., e_n$. Тогда векторы $e_1, e_2, ..., e_n, e_1j, e_2j, ..., e_nj$ составляют базис $\mathbb{C}$ -модуля $H^{\mathbb{C}}$. В этом базисе матрица симплектического образа T_i^s имеет вид:

$$T_i^s = \begin{Vmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{Vmatrix}$$

Так как для любого элемента $a \in A_0$ выполняется равенство $ia = ai$, то $T_iT(a) = T(a)T_i$. Из этого равенства получаем общий вид матрицы оператора $T(a)^s$:

$$T(a)^s = \begin{Vmatrix} T(a) & 0 \\ 0 & \overline{T(a)} \end{Vmatrix}.$$

Ввиду равенства (4) матрица оператора T_j^s имеет вид:

$$T_j^s = \begin{Vmatrix} 0 & R \\ -\overline{R} & 0 \end{Vmatrix},$$

причем, $R\overline{R} = I$.

Имеет место следующее утверждение [3]:
для произвольной матрицы A свойство $A\overline{A} = E$ выполняется тогда и только тогда, когда $A = S\overline{S}^{-1}$ (или $S^{-1}A\overline{S} = E$).

Возьмем такую матрицу для нашей матрицы R и рассмотрим матрицу

$$\widetilde{S} = \begin{Vmatrix} S & 0 \\ 0 & \overline{S} \end{Vmatrix}.$$

Матрица $\widetilde{S}$, очевидно, невырожденная, и $\widetilde{S}^{-1} = \begin{Vmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{S}^{\,-1} \end{Vmatrix}$.

С помощью матрицы $\widetilde{S}$ перейдем к новому базису $f = (f_1, ..., f_n, f_1j, ..., f_nj)$, $f_t \in E_i$, в $H^{\mathbb{C}}$. Как показывают вычисления, в базисе f матрица оператора T_i^s остается без изменения, а матрица оператора T_j^s принимает вид:

$$T_j = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, оператор T_j^s на базисные векторы действует по правилу: $T_j(f_s) = -f_s j$.

В базисе f матрица оператора $T(a)^s$, $a \in A_0$, имеет вид

$$\widetilde{S}^{-1}T(a)\widetilde{S} = \begin{Vmatrix} S^{-1}T(a)S & 0 \\ 0 & \overline{S}^{\,-1}\overline{T(a)}\,\overline{S} \end{Vmatrix},$$

поэтому, не вводя новых обозначений, будем считать, что общий вид матрицы остается таким же.

Так как для любого $a \in A_0$ выполняется равенство $aj = ja$, то $T(a)^s T_j^s = T_j^s T(a)^s$, или в матричном виде

$$\begin{Vmatrix} T(a) & 0 \\ 0 & \overline{T(a)} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} T(a) & 0 \\ 0 & \overline{T(a)} \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $T(a) \in M_n(\mathbb{R})$ для $a \in A_0$.

Рассмотрим комплексную подалгебру $A_1 = \{a_0 + a_1 i | a_0, a_1 \in A_0\}$ алгебры A и сужение T_{A_1} представления T на эту подалгебру. Для любого элемента $a_0 + a_1 i \in A_1$ операторы представления действуют следующим образом: $T_{A_1}(a_0 + a_1 i) = T(a_0) + T(a_1)T_i$. Аналогичное равенство имеет место и для симплектических образов данных операторов, причем в матричном виде:

$$T_{A_1}^s(a_0 + a_1 i) = \begin{Vmatrix} T(a_0) + iT(a_1) & 0 \\ 0 & T(a_0) - iT(a_1) \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что симплектические образы порождают комплексное представление алгебры A_1 над модулем $H^{\mathbb{C}}$, причем $\mathbb{C}$ - подмодуль E_i является инвариантным относительно этого представления.

Следовательно, представление T_{A_1} индуцирует представление $\Phi : A_1 \to B(E_i)$ такое, что

$$\Phi(a_0 + a_1 i) = T(a_0) + R_i T(a_1)$$

или, в матричном виде,

$$\Phi(a_0 + a_1 i) = T(a_0) + iT(a_1),$$

где матрицы $T(a_0),\ T(a_1) \in M_n(\mathbb{R})$.

Допустим, что Φ — приводимое представление, и $\mathbb{C}$ - подмодуль $H_1 \neq 0$ является минимальным инвариантным подмодулем относительно Φ. В этом случае, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что если вектор $x = \sum_{t=1}^n f_t x_t \in H_1$, то $\overline{x} = \sum_{t=1}^n f_t \overline{x}_t \in H_1$. Действительно, в противном случае мы можем построить $\mathbb{C}$ - подмодуль $\overline{H}_1 = \{x = \sum_{t=1}^n f_t x_t \in E_i \,|\, \overline{x} = \sum_{t=1}^n f_t \overline{x}_t \in H_1\}$. В силу включения $T(a) \in M_n(\mathbb{R})$ для $a \in A_0$ этот подмодуль является инвариантным относительно Φ. В таком случае $\mathbb{C}$ - подмодуль $H_2 = H_1 + \overline{H}_1$ также является инвариантным относительно представления Φ. Очевидно, что этот модуль содержит векторы с вещественными коэффициентами. Обозначим соответствующий $\mathbb{R}$ - подмодуль через $H_2^0 = \{x \in H_2 \,|\, x = \overline{x}\}$. Опять-таки в силу вещественности матриц $T(a) \in M_n(\mathbb{R}),\ a \in A_0$ нетрудно доказать его инвариантность относительно операторов $T(a)$, $a \in A_0$. Заметим, что $\dim[H_2^0 : \mathbb{R}] \leq \dim[H_1 : \mathbb{C}]$. Тогда $\mathbb{C}$ - подмодуль $H_3 = H_2^0 \dot{+} H_2^0 i$ инвариантен относительно представления Φ, причем, $\dim[H_3 : \mathbb{C}] \leq \dim[H_1 : \mathbb{C}]$.

Тогда подмодуль $\widehat{H_1} = H_1 + H_1 j$ является ненулевым $\mathbb{H}$ -подмодулем в H, инвариантным относительно представления T. Для этого достаточно показать его инвариантность относительно операторов T_i, T_j. Действительно, для всякого $x \in H_1$

$T_i(xj) = (T_i x)j = (xi)j \in H_1 j$;

$T_j(x) = T_j(\sum_s f_s x_s) = \sum_s (T_j f_s) x_s = \sum_s (f_s j)(-x_s) = -(\sum_s f_s \overline{x_s})j \in H_1 j$;

$T_j(xj) = T_j \sum_s f_s x_s j = T_j \sum_s (f_s j)\overline{x_s} = \sum_s T_j(f_s j)\overline{x_s} = \sum_s f_s \overline{x_s} \in \widehat{H_1}$.

В силу неприводимости представления T имеем $\widehat{H_1} = H$, но тогда и $H_1 = E_i$. Следовательно, представление Φ неприводимо.

Рассмотрим оператор $C \in B(H)$, коммутирующий со всеми операторами представления T. В частности, если $a = i$, то $T_i^s C^s = C^s T_i^s$. Тогда матрица симплектического образа оператора C имеет вид:

$$C^s = \begin{Vmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & \overline{C_1} \end{Vmatrix}.$$

Кроме того, верно и равенство $T_j^s C^s = C^s T_j^s$, откуда имеем, что $C_1 = \overline{C_1}$. Теперь, если возьмем элемент $a \in A_0$, то получим, что $T(a)^s C^s = C^s T(a)^s$, тогда $C_1^s T(a)^s = T(a)^s C_1^s$. Следовательно, для любого элемента $a_0 + a_1 i \in A_1$, справедливо следующее равенство: $\Phi(a_0 + a_1 i)C_1 = C_1 \Phi(a_0 + a_1 i)$. Тогда по лемме Шура $C_1 = \lambda E,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$C^s = \begin{Vmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & \lambda E \end{Vmatrix}.$$

Но тогда и $C = R_\lambda$.

Обобщая все выше проведенные рассуждения, приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Если T — неприводимое представление вещественной алгебры с кватернионной структурой, $\mathcal{A}$ — алгебра операторов этого представления, то* $\overline{\mathcal{A}} = \{R_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Таким образом, мы теперь можем сформулировать основную структурную теорему о простых вещественных алгебрах с кватернионной структурой.

Теорема 4. *Всякая конечномерная вещественная простая алгебра с кватернионной структурой изоморфна алгебре всех линейных операторов, действующих в некотором конечномерном кватернионном модуле.*

Доказательство. Пусть A — вещественная простая алгебра с кватернионной структурой и A_0 — главная подалгебра в A.

Пусть $T : A \to B(H)$ — точное неприводимое представление этой алгебры, и $\mathcal{A}$ — алгебра операторов этого представления. Достаточно показать, что эта алгебра совпадает с $B(H)$.

Из теоремы 2 следует, что $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$. С другой стороны, по теореме 3 имеем, что $\overline{\mathcal{A}} = \{R_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Но тогда второй коммутант алгебры $\mathcal{A}$ совпадает со всей алгеброй операторов $B(H)$, то есть $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = B(H)$. Следовательно, $\mathcal{A} = B(H)$, что и требовалось доказать. □

Выводы

В статье описан тип вещественных алгебр, изоморфных алгебре линейных операторов, действующих в некотором конечномерном кватернионном модуле. Причем, показано, что наличие такой структуры в алгебре является также и необходимым условием. В процессе доказательства получен нетривиальный результат о строении коммутанта алгебры операторов неприводимого представления вещественной алгебры с кватернионной структурой.

Список литературы

[1] Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.*// М.: Мир. – 1986. – 543с.

[2] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства.*// М.: Наука. – 1969. – 432с.

[3] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.*// М.: Наука. – 1976. – 560с.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
просп. Вернадского, 4, 95036, Симферополь, Украина
E-mail: i_karpenko@inbox.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.927.25 MSC2000: 34L15

Е.С. Карулина

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО ТИПА[1]

Введение

Рассматривается следующая задача Штурма – Лиувилля:

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y'(0) - k^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k^2 y(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $q(x)$ — неотрицательная ограниченная на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^1 q^\gamma(x)dx = 1, \quad \gamma \neq 0. \tag{3}$$

Под решением задачи (1) – (2) будем понимать функцию $y(x)$, которая определена на $[0,1]$, удовлетворяет условиям (2), у которой $y'(x)$ абсолютно непрерывна и уравнение (1) выполняется почти всюду на интервале $(0,1)$.

Оценивается минимальное собственное значение λ_1 этой задачи при различных значениях γ и k.

Согласно вариационному принципу $\lambda_1 = \inf\limits_{y(x)\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,y)$, где

$$R(q,y) = \frac{\int_0^1 y'^2(x)dx + \int_0^1 q(x)y^2(x)dx + k^2\left(y^2(0) + y^2(1)\right)}{\int_0^1 y^2(x)dx}. \tag{4}$$

Пусть

$$m_\gamma = \inf_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1, \quad M_\gamma = \sup_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1,$$

где A_γ – множество таких неотрицательных ограниченных на $[0,1]$ функций $q(x)$, что $\int_0^1 q^\gamma(x)dx = 1$.

Задача для уравнения $y'' + \lambda q(x)y(x) = 0$ при условиях $y(0) = y(1) = 0$, (3) рассматривалась в работе [1]. В работе [2] исследовалась аналогичная задача при условиях (2), (3). Задача для уравнения (1) при условиях $y(0) = y(1) = 0$, (3) изучалась в работах [3], [4].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта НШ-2538.2006.1

1. Основные результаты

Теорема 1. (1) *Если* $0<\gamma<1$, *то* $M_\gamma=+\infty$;

(2) *если* $\gamma\geq 1$, *то* $M_\gamma\leq 2k^2+1$.

Теорема 2. *При всех* $\gamma\neq 0$:

(1) *если* $0<k^2<\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, *то* $m_\gamma\geq\dfrac{k^2}{2k^2+2}$;

(2) *если* $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\leq k^2<\dfrac{\pi}{2}$, *то* $m_\gamma>k^4$;

(3) *если* $k^2=\dfrac{\pi}{2}$, *то* $m_\gamma\geq\dfrac{\pi^2}{4}$;

(4) *если* $k^2>\dfrac{\pi}{2}$, *то* $m_\gamma>\dfrac{\pi^2}{4}$.

2. Доказательство основных результатов

Утверждение. *Если* $0<\gamma<1$, *то* $M_\gamma=+\infty$.

Доказательство. Пусть $0<\gamma<1$. Разобьем отрезок $[0,\,1]$ на n равных частей точками $0=\varepsilon_0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\dots<\varepsilon_n=1$ и положим $\varepsilon=1/n$.

Построим функцию на отрезке $[0,\,\varepsilon]$:

$$q_\varepsilon(x)=\begin{cases}\varepsilon^{-\beta}, & 0<x<\varepsilon^\rho,\\ 0, & \varepsilon^\rho<x<\varepsilon,\end{cases}$$

где $\rho=\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$, $\beta=\frac{2}{1-\gamma}$, затем продолжим эту функцию на весь отрезок $[0,\,1]$ периодически с периодом ε.

Данная функция $q_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию (3):

$$\int\limits_0^1 q_\varepsilon^\gamma(x)dx=n\int\limits_0^\varepsilon q_\varepsilon^\gamma(x)dx=n\int\limits_0^{\varepsilon^\rho}\varepsilon^{-\beta\gamma}dx=\tfrac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon^{\rho-\beta\gamma}=1.$$

По теореме о среднем найдется такое число $\theta\in[0,\,\varepsilon^\rho]$, что $\int\limits_0^{\varepsilon^\rho}y^2(x)dx=y^2(\theta)(\varepsilon^\rho-0)$, из чего следует, что

$$\int\limits_0^\varepsilon q_\varepsilon(x)y^2(x)dx=\varepsilon^{-\beta}\int\limits_0^{\varepsilon^\rho}y^2(x)dx=\varepsilon^{-1}y^2(\theta).$$

Используя равенство $y(x)=y(\theta)+\int\limits_\theta^x y'(s)ds$ и неравенство Гельдера, получим

$$y(x)\leq y(\theta)+\sqrt{x-\theta}\cdot\left(\int\limits_\theta^x {y'}^2(s)ds\right)^{\frac12},$$

откуда следует, что $y^2(x)\leq 2y^2(\theta)+2(x-\theta)\int\limits_\theta^x {y'}^2(s)ds$,
и, следовательно,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\varepsilon y^2(x)dx&\leq 2\int\limits_0^\varepsilon y^2(\theta)dx+2\int\limits_0^\varepsilon\Big[(x-\theta)\int\limits_\theta^x {y'}^2(s)ds\Big]dx=\\&=2\int\limits_0^\varepsilon y^2(\theta)dx+2\left(\int\limits_0^\theta\Big[(\theta-x)\int\limits_x^\theta {y'}^2(s)ds\Big]dx+\int\limits_\theta^\varepsilon\Big[(x-\theta)\int\limits_\theta^x {y'}^2(s)ds\Big]dx\right)=\\&=2\varepsilon y^2(\theta)+2\left(\int\limits_0^\theta ds\int\limits_0^s(\theta-x){y'}^2(s)dx+\int\limits_\theta^\varepsilon ds\int\limits_s^\varepsilon(x-\theta){y'}^2(s)dx\right)\leq\\&\leq 2\varepsilon y^2(\theta)+2\varepsilon^2\int\limits_0^\varepsilon {y'}^2(x)dx=2\varepsilon^2\left(\int\limits_0^\varepsilon q_\varepsilon(x)y^2(x)dx+\int\limits_0^\varepsilon {y'}^2(x)dx\right).\end{aligned}$$

Проделав такие преобразования для каждого отрезка $[\varepsilon_{i-1},\,\varepsilon_i]$, $i=1,\,2,\dots,n$, на отрезке $[0,\,1]$ получим

$$\int\limits_0^1 y^2(x)dx\leq 2\varepsilon^2\left(\int\limits_0^1 q_\varepsilon(x)y^2(x)dx+\int\limits_0^1 {y'}^2(x)dx\right)$$

для любого $y(x) \in H^1(0,1)$.

Подставим полученное неравенство в (4):

$$R(q_\varepsilon, y) = \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_0^1 q_\varepsilon(x) y^2(x)dx}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx} + \frac{k^2\left(y^2(0)+y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx} \geq$$

$$\geq \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_0^1 q_\varepsilon(x) y^2(x)dx}{2\varepsilon^2\left(\int\limits_0^1 q_\varepsilon(x)y^2(x)dx + \int\limits_0^1 y'^2(x)dx\right)} + \frac{k^2\left(y^2(0)+y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{k^2\left(y^2(0)+y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx} \to \infty \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ получим

$$M_\gamma = \sup_{q\in A_\gamma}\Big(\inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\, y)\Big) \geq \inf_{y\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q_\varepsilon,\, y) = \infty.$$

□

Утверждение. *Если* $\gamma \geq 1$, *то* $M_\gamma \leq 1 + 2k^2$.

Доказательство. Пусть $y_1(x) = \varepsilon$, тогда

$$\lambda_1(q) = \inf_{y(x)\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,\, y) \leq R(q,\, y_1) =$$

$$= \frac{\int\limits_0^1 {y_1'}^2(x)dx + \int\limits_0^1 q(x)y_1^2(x)dx + k^2\left(y_1^2(0)+y_1^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y_1^2(x)dx} = \frac{0 + \varepsilon^2 \int\limits_0^1 q(x)dx + 2k^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2}.$$

При $\gamma = 1$ $\int\limits_0^1 q(x)dx = 1$. При $\gamma > 1$ с помощью неравенства Гельдера получим:

$$\int\limits_0^1 q(x)dx \leq \left(\int\limits_0^1 q^\gamma(x)dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int\limits_0^1 1^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1.$$

Отсюда $\lambda_1(q) \leq 1 + 2k^2$, и, следовательно,

$$M_1 = \sup_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1(q) \leq \sup_{q(x)\in A_\gamma} 1 + 2k^2 = 1 + 2k^2.$$

□

Утверждение. *При всех* $\gamma \neq 0$ *имеем:* $m_\gamma \geq \dfrac{k^2}{2k^2+2}$.

Доказательство. Введем функционал

$$F(y,\, q) = \int\limits_0^1 y'^2(x)dx + \int\limits_0^1 q(x)y^2(x)dx + k^2(y^2(0) + y^2(1)).$$

Легко видеть, что при $k \neq 0$ выполняются неравенства

$$y^2(0) \leq \frac{F(y,\, q)}{k^2}, \qquad \int\limits_0^1 y'^2(x)dx \leq F(y,\, q). \tag{5}$$

Используя равенство $y(x) = y(0) + \int\limits_0^x y'(s)ds$, получим

$$y^2(x) = \left(y(0) + \int\limits_0^x y'(s)ds \right)^2 \leq 2y^2(0) + 2\left(\int\limits_0^x y'(s)ds \right)^2,$$

откуда с помощью неравенства Гельдера получим:

$$y^2(x) \leq 2y^2(0) + 2\int\limits_0^1 {y'}^2(x)dx. \tag{6}$$

В силу неравенств (5) и (6) имеем

$$y^2(x) \leq \frac{2F(y,\,q)}{k^2} + 2F(y,\,q) = 2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) F(y,\,q).$$

Из классического вариационного принципа следует, что

$$\lambda_1(q) = \inf_{y(x)\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{F(y,\,q)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}.$$

Следовательно, $\lambda_1(q) \geq \dfrac{1}{2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}$.

Отсюда получаем

$$m_\gamma = \inf_{q\in A_\gamma} \lambda_1(q) \geq \frac{k^2}{2k^2+2}.$$

Очевидно, что это неравенство верно и при $k = 0$.

$\square$

Утверждение. *При всех $\gamma \neq 0$ имеем:*

- *если $0 < k^2 < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, то $m_\gamma \geq \dfrac{k^2}{2k^2+2}$;*
- *если $k^2 \in \left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $m_\gamma > k^4$;*
- *если $k^2 = \pi/2$, то $m_\gamma \geq \pi^2/4$;*
- *если $k^2 > \pi/2$, то $m_\gamma > \pi^2/4$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{7}$$

с условиями (2). Найдем λ_1^0 — минимальное собственное значение задачи (7), (2).

Решение уравнения (7) имеет вид $y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Из условия (2) при $k \neq 0$ получим уравнение:

$$\left(k^2 - \frac{\lambda}{k^2}\right) \sin\sqrt{\lambda} + 2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0. \tag{8}$$

Минимальное собственное значение задачи (7), (2) λ_1^0 будет являться минимальным положительным решением этого уравнения.

а) Рассмотрим сначала случай $\cos\sqrt{\lambda} \neq 0$. Тогда после деления уравнения (8) на $\cos\sqrt{\lambda}$ получим

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \frac{2\sqrt{\lambda}k^2}{(\lambda - k^4)}. \tag{9}$$

Будем искать t_0 — наименьшее решение уравнения

$$\operatorname{tg} t = \frac{2tk^2}{(t^2 - k^4)}, \qquad \text{где } t = \sqrt{\lambda} > 0.$$

Функция, стоящая в правой части уравнения, является убывающей при $t \in (0; k^2)$ и при $t \in (k^2; +\infty)$; стремится к $-\infty$ при $t \to k^2$ слева, к $+\infty$ при $t \to k^2$ справа, к 0 при $t \to +\infty$. Учитывая также характер поведения функции $\operatorname{tg}(t)$ (на рис. 1 ее график выделен жирным), получим следующие оценки для t_0:

(1) если $0 < k^2 < \pi/2$, то $t_0 \in \left(k^2;\, \pi/2\right)$;

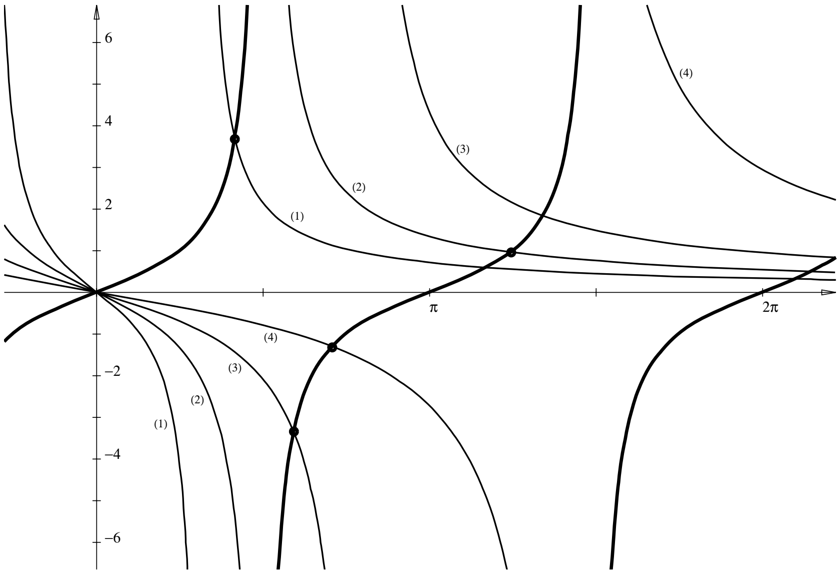

Рис. 1. Решение уравнения $\operatorname{tg} t = \frac{2tk^2}{(t^2-k^4)}$ при разл. значениях k

(2) если $k^2 = \pi/2$, то t_0 – наименьшее решение уравнения $\operatorname{tg} t = \dfrac{\pi t}{(t^2-\pi^2/4)}$, $t_0 \in (\pi;\, 3\pi/2)$;

(3) если $\pi/2 < k^2 \le \pi$, то $t_0 \in \big(\pi/2;\, k^2\big)$;

(4) если $k^2 > \pi$, то $t_0 \in (\pi/2;\, \pi)$.

Тогда для наименьшего решения уравнения (9) $\lambda_a = {t_0}^2$ получим:

- если $0 < k^2 < \pi/2$, то $\lambda_a \in \big(k^4;\, \pi^2/4\big)$;
- если $k^2 = \pi/2$, то $\lambda_a = \tilde\lambda_a$ — наименьшему решению уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi\sqrt{\lambda}}{(\lambda-\pi^2/4)}$, $\tilde\lambda_a \in \big(\pi^2;\, 9\pi^2/4\big)$;
- если $\pi/2 < k^2 \le \pi$, то $\lambda_a \in \big(\pi^2/4;\, k^4\big)$;
- если $k^2 > \pi$, то $\lambda_a \in \big(\pi^2/4;\, \pi^2\big)$.

b) Теперь рассмотрим случай $\cos\sqrt{\lambda} = 0$. Тогда уравнение (8) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda} = \pi/2 + \pi n, \quad n = 0, 1, \dots \\ \big(k^2 - \lambda/k^2\big)\sin\sqrt{\lambda} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

то есть

$$\begin{cases} \lambda = \pi^2/4 + \pi^2 n^2 + \pi^2 n, \quad n = 0, 1, \dots \\ \lambda = k^4. \end{cases}$$

Система имеет решение, причем единственное, только при $k^2 = \pi/2 + \pi n$, $n = 0, 1, \dots$. При $k^2 = \pi/2$ для решения $\lambda_b = \pi^2/4$ будет выполняться неравенство $\lambda_b < \tilde\lambda_a$.

Все остальные решения λ системы (10) (соответствующие значениям $k^2 = 3\pi/2, \dots,\ k^2 = \pi/2 + \pi n$, $n = 1, 2, \dots$) превосходят решение λ_b, следовательно, $\lambda_b = \pi^2/4$ — наименьшее возможное решение уравнения (8).

Таким образом, для λ_1^0 — минимального собственного значения задачи (7), (2) — получены следующие оценки:

- если $0 < k^2 < \pi/2$, то $\lambda_1^0 \in \big(k^4;\, \pi^2/4\big)$;
- если $k^2 = \pi/2$, то $\lambda_1^0 = \pi^2/4$;
- если $\pi/2 < k^2 \le \pi$, то $\lambda_1^0 \in \big(\pi^2/4;\, k^4\big)$;
- если $k^2 > \pi$, то $\lambda_1^0 \in \big(\pi^2/4;\, \pi^2\big)$.

Согласно вариационному принципу $\lambda_1^0 = \inf\limits_{y(x)\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(0, y)$, где

$$R(0, y) = \frac{\int\limits_0^1 y'^2(x)dx + k^2\left(y^2(0)+y^2(1)\right)}{\int\limits_0^1 y^2(x)dx}.$$

Вернувшись к задаче (1), (2), оценим минимальное собственное значение λ_1 с помощью λ_1^0:

$$\lambda_1(q) = \inf_{y(x)\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(q,y) \geq \inf_{y(x)\in H_1(0,1)\setminus\{0\}} R(0,y) = \lambda_1^0.$$

Тогда $m_\gamma = \inf\limits_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1(q) \geq \inf\limits_{q(x)\in A_\gamma} \lambda_1^0 = \lambda_1^0$.

Таким образом, для m_γ получили:

- если $0 < k^2 < \pi/2$, то $m_\gamma > k^4$;
- если $k^2 = \pi/2$, то $m_\gamma \geq \pi^2/4$;
- если $k^2 > \pi/2$, то $m_\gamma > \pi^2/4$.

Ранее была получена следующая оценка: $m_\gamma \geq \dfrac{k^2}{2k^2+2}$ при всех $\gamma \neq 0$. Сравним эти оценки и выберем более сильную.

1) Сначала рассмотрим интервал $k^2 < \pi/2$. При таких значениях k нужно выбрать наибольшее из выражений $k^2/(2k^2+2)$ и k^4. Выражение $k^2/(2k^2+2) - k^4$ будет положительным только при $k^2 < (-1+\sqrt{3})/2$, следовательно,

- если $k^2 < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, то $\dfrac{k^2}{2k^2+2} > k^4$;
- если $k^2 \in \left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\dfrac{k^2}{2k^2+2} \leq k^4$.

2) При значениях $k^2 \geq \pi^2/4$ нужно выбрать наибольшее из выражений $\pi^2/4$ и $k^2/(2k^2+2)$. Наибольшим будет $\pi^2/4$, так как неравенство $\pi^2/4 - k^2/(2k^2+2) > 0$ верно для любых k.

Теперь оценки для m_γ имеют следующий вид:

- если $k^2 \in \left(0; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$, то $m_\gamma \geq \frac{k^2}{2k^2+2}$;
- если $k^2 \in \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $m_\gamma > k^4$;
- если $k^2 = \frac{\pi}{2}$, то $m_\gamma \geq \frac{\pi^2}{4}$;
- если $k^2 > \frac{\pi}{2}$, то $m_\gamma > \frac{\pi^2}{4}$.

□

Список литературы

[1] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. *On Spectral theory of elliptic operators* // in Operator theory: Advances and Applications. Birkhouser. – 1996. – V.89. – P. 1-325.

[2] Мурышкина О.В. *Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с симметричными краевыми условиями* // Вестник молодых ученых. – 3'2005. Серия: Прикладная математика и механика. – 1'2005. – С. 36-52.

[3] Винокуров В.А., Садовничий В.А., *О границах изменения собственного значения при изменении потенциала* // Доклады Академии наук. – 2003. – Т.392. – N5 – с.592-597.

[4] Ежак С.С. *Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с интегральным условием* // Современная математика и ее приложения. – 2005. – т.36. – с.56-69.

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)

ул. Нежинская, 7, 119501, Москва, Россия

E-mail: `KarulinaES@yandex.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.94

Н.Н. Конечная

АСИМПТОТИКА И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

Введение

Асимптотические формулы и оценки Лиувилля – Грина для решений дифференциального уравнения Штурма – Лиувилля хорошо известны и превосходно изложены в книге M.S.P. Eastham [1]. В работе [2] получены асимптотические формулы и оценки типа Лиувилля – Грина для решений одного класса дифференциальных уравнений $n+1$ – го порядка ($n > 1$), фундаментальная система решений которых строится по фундаментальной системе решений дифференциального уравнения второго порядка. Однако, применяя методы, изложенные в работах М.В. Федорюка [3] и M.S.P. Eastham [1], асимптотические формулы и оценки типа Лиувилля – Грина можно получить для решений более общего класса дифференциальных уравнений высокого порядка.

1. Постановка

Пусть вещественные функции p и q измеримы на полуоси $R^+ := [0, +\infty)$, функции p^{-1}, q суммируемы на каждом ее замкнутом конечном подынтервале $[\alpha, \beta] \subset R^+$, α_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) – действительные числа, причем $\alpha_k = \alpha_{n+1-k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), и n – натуральное число.
Обозначим через $F := (f_{ij})$ матрицу с элементами f_{ij} ($i, j = 1, \ldots, n+1$), где $f_{k,k+1} := p^{-1}$, $f_{k+1,k} := \alpha_k q$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) и $f_{ij} := 0$ при остальных значениях i и j. Следуя общепринятой процедуре (см., напр., [[4]; гл. I , п. 2]), определим посредством матрицы F квазипроизводные функции y, полагая $y^{[0]} := y$, $y^{[1]} := p(y^{[0]})'$, $y^{[k+1]} := p((y^{[k]})' - f_{k+1,k}y^{[k-1]})$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), и скалярное квазидифференциальное выражение $n+1$ – го порядка

$$\nu y := (y^{[n]})' - f_{n+1,n}y^{[n-1]}.$$

Таким образом, область определения выражения ν – это множество всех функций y, для которых существуют локально абсолютно непрерывные квазипроизводные $y^{[j]}$ до n–го порядка включительно.

В данной работы исследуется асимптотика решений скалярного дифференциального уравнения $n+1$ - го порядка

$$\nu y = 0 \tag{1}$$

при $x \to +\infty$, и, как следствие, получены оценки типа Лиувилля-Грина для решений дифференциального уравнения (1).
Далее рассмотрены частные случаи системы дифференциальных уравнений, равносильной уравнению (1). Особо стоит отметить второй пример, так как асимптотические формулы для решений этого класса дифференциальных уравнений были получены другим методом в работе К.А. Мирзоева [2].

---

[1]Автор поддержан грантом РФФИ № 07-01-00192-а.

2. Исследование

Уравнение (1) равносильно системе дифференциальных уравнений

$$Y' = F(x)Y, \tag{2}$$

где Y – вектор - столбец, элементами которого являются квазипроизводные $y^{[k]}$ функции y $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Таким образом, вопрос об асимптотике решений дифференциального уравнения (1) сводится к исследованию асимптотики решений системы дифференциальных уравнений (2).

Матрицу $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = (q/p)^{\frac{1}{2}}\, Q(x)CQ^{-1}(x),$$

где

(1) Q – диагональная матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$

$$Q = dg\left(1, (pq)^{1/2}, (pq), (pq)^{3/2}, \ldots, (pq)^{n/2}\right);$$

(2) C – постоянная матрица с элементами c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$, где $c_{k,k+1} := 1$, $c_{k+1,k} := \alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $c_{ij} := 0$ при остальных значениях i и j.

Перечислим основные предположения относительно матрицы F:

1^0 Матрица C имеет $n+1$ простое собственное значение $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$; $v_1, v_2, \ldots v_{n+1}$ – соответствующие собственные векторы матрицы C;
2^0 $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$ при $x \in R^+$;
3^0 $p\prime$, $q\prime \in AC_{loc}(R^+)$;
4^0 $(\mid q \mid / \mid p \mid)^{1/2} \notin \mathcal{L}_1(R^+)$;
5^0 $\mid pq \mid^{-1/4} \frac{d}{dx}(\mid p \mid \frac{d}{dx} \mid pq \mid^{-1/4}) \in \mathcal{L}_1(R^+)$;

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1^0 – 5^0. *Тогда система (2) имеет решения* $Y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n+1)$ *такие, что при* $x \to +\infty$ *справедливы асимптотические формулы*

$$Y_k(x) = (pq)^{-n/4} Q(x)\{v_k + o(1)\} exp\left(\lambda_k \int\limits_0^x (q/p)^{1/2} dt\right). \tag{3}$$

Доказательство. Преобразование

$$Y = QZ$$

приводит систему (2) к виду

$$Z' = \left((q/p)^{1/2} C - Q^{-1}Q'\right) Z. \tag{4}$$

Пусть T – матрица, вектор-столбцами которой являются собственные векторы $v_1, v_2, \ldots v_{n+1}$ матрицы C. Диагонализируем матрицу C

$$T^{-1}CT = \Lambda = dg\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}\right).$$

Вычисления показывают, что

$$Q^{-1}Q' = \frac{(pq)'}{2pq} D,$$

где $D = dg(0, 1, 2, \ldots, n)$ – постоянная диагональная матрица.
Дальнейшее преобразование

$$Z = TW$$

приводит систему (4) к виду

$$W' = \left((q/p)^{1/2}\Lambda - \frac{(pq)'}{2pq} T^{-1}DT\right) W. \tag{5}$$

Тогда система (5) имеет решения $W_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n+1)$ такие, что при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические формулы (см.[[1]; гл 1, п. 1.3, т. 1.3.1, стр. 8]

$$W_k(x) = \{e_k + o(1)\}exp\left(\int\limits_0^x \left\{(q/p)^{1/2}\lambda_k - r_{kk}((pq)'/2pq)\right\}dt\right), \tag{6}$$

где r_{kk}−к-ый диагональный элемент матрицы $T^{-1}DT$.

Найдем диагональные элементы матрицы $T^{-1}DT$. Пусть E – матрица с элементами $e_{i,n+2-i} = 1$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ и $e_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j $(i, j = 1, 2\ldots, n+1)$, и S – симметрическая матрица с элементами $s_{i,n+3-i} = 1$ $(i = 2, 3\ldots, n+1)$, $s_{i,n+1-i} = \alpha_{n+1-i}$ $(i = 1, 2\ldots, n)$ и $s_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j $(i, j = 1, 2\ldots, n+1)$. Так как матрица C имеет различные собственные значения λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$, и ее можно представить в виде

$$C = ES,$$

то строками матрицы T^{-1} являются вектор-строки

$$(Ev_k)^t/(Ev_k)^t v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{7}$$

(см.[[1]; гл 1, п. 1.2, л. 1.2.1, л. 1.2.2, стр. 4]).

Обозначим через $u_j^{(k)}$ $(j = 1, 2\ldots, n+1)$ элементы вектора v_k. Тогда из (7) следует,что

$$r_{kk} = \sum_{j=1}^{n+1}(j-1)u_{n+2-j}^{(k)}u_j^{(k)} / \sum_{j=1}^{n+1}u_{n+2-j}^{(k)}u_j^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Просуммировав дважды найденное выражение, получим

$$2r_{kk} = n\sum_{j=1}^{n+1}u_{n+2-j}^{(k)}u_j^{(k)} / \sum_{j=1}^{n+1}u_{n+2-j}^{(k)}u_j^{(k)} = n,$$

откуда

$$r_{kk} = n/2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{8}$$

В силу равества (8) асимптотические формулы (5) примут вид

$$W_k(x) = (pq)^{-n/4}\{e_k + o(1)\}exp\left(\lambda_k\int\limits_0^x (q/p)^{1/2}dt\right).$$

В силу преобразований $Y = QTW$ система (2) имеет решения $Y_k(x)$ $(1 \le k \le\ n+1)$, для которых при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические формулы (3). Теорема доказана.

□

Замечание. Так как матрица T является постоянной, а элементами первой строки диагональной матрицы $Q(x)$ служат числа, то из асимптотических формул (3) легко получить и асимптотику решений дифференциального уравнения (1) при $x \to +\infty$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1^0 – 5^0, $pq < 0$ *на* R^+ *и все собственные значения матрицы* C *действительные. Тогда для решений уравнения (1) при больших значениях аргумента верны оценки типа Лиувилля-Грина*

$$|y| \le (const)|pq|^{-n/4}. \tag{9}$$

Доказательство. В силу теоремы при выполнении вышеперечисленных условий система (2) имеет фундаментальную систему решений $Y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n+1)$, для которой при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические формулы (3). Если $pq < 0$ на R^+ и все собственные значения C действительные, то в показателе экспоненциальной функции стоит чисто мнимое выражение. Поэтому для решений уравнения (1) будут справедливы оценки (9). Утверждение доказано. □

Пример 1. Пусть $\alpha_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Матрица C с элементами $c_{k,k+1} = 1$, $c_{k+1,k} = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $c_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$ имеет простые действительные собственные числа

$$\lambda_k = 2\cos\frac{\pi k}{n+2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Система (2) имеет решения $Y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n+1)$ такие, что при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$Y_k(x) = (pq)^{-n/4}Q(x)\{v_k + o(1)\}exp\left(2\cos\frac{\pi k}{n+2}\int\limits_0^x (q/p)^{1/2}dt\right).$$

Согласно следствию, для решений уравнения (1) верны оценки (9) при условии, что $pq < 0$.

Пример 2. Пусть $\alpha_k = k(n+1-k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Матрица C с элементами $c_{k,k+1} = 1$, $c_{k+1,k} = k(n+1-k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $c_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$ имеет простые действительные собственные числа

$$\lambda_k = n - 2k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Система (2) имеет решения $Y_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ такие, что при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$Y_k(x) = (pq)^{-n/4}Q(x)\{v_k + o(1)\}exp\left((n-2k)\int\limits_0^x (q/p)^{1/2}dt\right).$$

Согласно следствию, в данном случае для решений уравнения (1) будут верны оценки (9) при условии, если $pq < 0$.

Выводы

Отметим, что во многих работах оценки для решений дифференциальных уравнений высокого порядка были получены на основе алгебраического метода Н.П.Купцова [6]. В [8] M.S.P. Eastham показал, что для решений дифференциального уравнения четвертого порядка

$$z^{(4)} + a(qz')' + (bq^2 + q'')z = 0$$

справедливы оценки

$$|z| \leq (const)|\phi|^{-k}, \tag{10}$$

где $k = \frac{1}{2}\{2 - (a-1-b)^{-1/2}(b^{-1} + a - 3)\}$, при условии, что

$$0 < b < a - 1.$$

Далее M.S.P. Eastham в работе [9] и S.B. Hadid в работе [7] усовершенствовали метод Н.П. Купцова для дифференциальных уравнений высокого порядка. Асимптотические методы, предложенные М.В. Федорюком [3] и M.S.P. Eastham [1], позволяют получить более точные оценки для решений дифференциальных уравнений высокого порядка. Например, в случае дифференциального уравнения четвертого порядка при условии, что

$$a > 0 \quad \text{и} \quad a^2 > 4b > 0,$$

можно показать, что все решения удовлетворяют неравенству

$$|\, z \,| \leq (const) \,|\, \phi \,|^{-3/2}\,. \tag{11}$$

Заметим, что в (10) $k < 1$, в то время как в (11) стоит значение $3/2$.

Список литературы

[1] Eastham M. S. P. The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems.— Oxford: Clarendon Press, 1989.— 241 p.

[2] Мирзоев К. А. Об одном классе операторов, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка // Успехи математических наук.— 2000.— Т. 55, Вып. 6.— С. 147—148.

[3] Федорюк М. В. Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов // ДАН СССР.— 1966.— Т. 169, Вып. 2.— С. 288—291.

[4] Everitt W. N., Marcus L. Boudary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Diffrrential and Quasi-Differential Operators.—Math. Surveys and Monofraphs, 1999.— 560 p.

[5] Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Математический сборник.— 1969.— Т. 79(121), Вып. 4(8).— С. 477—516.

[6] Kuptsov N. P. An estimate for solutions of a system of linear differential equations // Uspehki Mat. Nauk.— 1963.— V. 18.— P. 159—164.

[7] Hadid S. B. Estimates of Liouville-Green type for solutions of systems of differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.— 1979.— 83A.— P. 1—9.

[8] Eastham M. S. P. Square-integrable solutions of the differential equation $y^{(4)}+a(qy')'+(bq^2+q'')y=0$ // Nieuw archief voor wiskunde, Ser. 3.— 1976.— XXIV.— P. 256—269.

[9] Eastham M. S. P. The limit-$2n$ case of symmetric differential operators of order $2n$ // Proc. London Math. Soc., Ser. 2.— 1979.— V. 38.— P. 272—294.

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.984 MSC2000: 47B65

О.Ю. Кушель

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ВТОРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ У НЕРАЗЛОЖИМОГО ОПЕРАТОРА

Введение

В статье Я.С. Ладченко [1] была доказана следующая теорема: *пусть X — полуупорядоченное банахово пространство с телесным конусом K, $A : X \to X$ неразложимый относительно K вполне непрерывный линейный оператор. Пусть его внешний квадрат $A \wedge A : X \wedge X \to X \wedge X$ неразложим относительно некоторого телесного конуса K_2 в $X \wedge X$. Тогда оператор A имеет второе вещественное и простое собственное значение λ_2:*

$$0 < \lambda_2 < \lambda_1 = \rho(A).$$

В данной формулировке эта теорема будет неверной. Приведем следующий контрпример.

Пример 1. Пусть X – конечномерное пространство $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданный матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, такой оператор будет неотрицательным и неразложимым относительно телесного конуса K неотрицательных векторов в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим внешний квадрат $A \wedge A$ оператора A, действующий пространстве $\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3$, которое, как известно, также является трехмерным. В базисе, состоящем из внешних произведений исходных базисных векторов, матрица внешнего квадрата оператора $A \wedge A$ будет совпадать со второй ассоциированной матрицей, т.е. иметь следующий вид:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что оператор $A \wedge A$ будет оставлять инвариантным телесный конус K_2, натянутый на векторы $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ -1,\ 0)$ и $(0,\ 0,\ 1)$. Также очевидно, что $A \wedge A$ будет неразложимым относительно K_2. Однако, т.к. оператор A импримитивен с показателем импримитивности $h(A) = 3$, то собственные значения оператора A представляют собой тройку вида 1, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Второго положительного собственного значения у A не будет.

На основании оператора, описанного в примере 1, легко построить конечномерный оператор, действующий в $C[a, b]$.

1. Постановки

При доказательстве теоремы в [1] была использована следующая схема:

(1) Рассматривается вполне непрерывный неразложимый линейный оператор A, действующий в полуупорядоченном банаховом пространстве X с телесным конусом K. При помощи теоремы Крейна–Рутмана доказывается существование у оператора A собственного вектора x^1 в конусе K и собственного функционала x_1^* в конусе K^*, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = \rho(A) > 0$.

(2) Во внешнем квадрате $X \wedge X$ пространства X выделяется подпространство $X_2^0 = \{x^1 \wedge x : x \in X\}$. Рассматривается конус $K_2^0 = K_2 \cap X_2^0$, где K_2 — некоторый телесный конус в $X \wedge X$. При условии телесности конуса K_2 в $X \wedge X$ и неразложимости оператора $A \wedge A$ в $X \wedge X$ относительно K_2, доказывается телесность конуса K_2^0 в X_2^0 и неразложимость сужения оператора $A \wedge A$ на X_2^0 относительно конуса K_2^0.

(3) В пространстве X рассматривается множество $K' = \{x \in X : \ x_1^*(x) = 0, \, x^1 \wedge x \in K_2^0\}$. Доказывается, что K' будет телесным конусом в подпространстве $X' = \{x \in X : x_1^*(x) = 0\}$. Доказывается неразложимость сужения A' оператора A на подпространство X' относительно конуса K'.

(4) При помощи теоремы Крейна-Рутмана, применяемой к оператору A', доказывается положительность спектрального радиуса $\rho(A')$ и существование в конусе K' собственного вектора x^2, отвечающего собственному значению $\lambda_2 = \rho(A')$. Из построения подпространства X' следует линейная независимость векторов x^1 и x^2 и включение $x^1 \wedge x^2 \in K_2^0$. Из инвариантности подпространства X' относительно оператора A и простоты собственного значения $\rho(A')$ доказывается простота собственного значения λ_2. Далее доказывается, что в кольце $\lambda_2 < |\lambda| \leq \lambda_1$ нет точек спектра оператора A, отличных от λ_1.

Данная схема обобщает рассуждения М.А. Красносельского – А.В. Соболева из [2] - [4]. Однако в рассуждениях [1] содержится ряд больших и малых неточностей. В частности, доказывается следующая лемма о телесности конуса K_2^0: *пусть оператор $A \wedge A$ неразложим в пространстве $X \wedge X$ относительно телесного конуса K_2. Тогда конус $K_2^0 = K_2 \cap X_2^0$ телесен в подпространстве X_2^0 и сужение оператора $A \wedge A$ на X_2^0 является неразложимым оператором относительно конуса K_2^0*. Доказательство леммы основано на предположении, что $K_2^0 = K_2 \cap X_2^0$ содержит хотя бы один ненулевой элемент, что будет верно далеко не всегда и требует дополнительного предположения в виде определенной связи между конусами K в пространстве X и K_2 в пространстве $X \wedge X$. Однако и при этом предположении упомянутая выше лемма будет неверной. Приведем следующий контрпример.

Пример 2. Рассмотрим линейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds$$

с ядром $k(t,s) = t + 1 - s$, действующий в $C[0,1]$. Такой оператор будет неотрицательным и неразложимым относительно телесного конуса K неотрицательных функций в $C[0,1]$, так как его ядро неотрицательно и неразложимо на $[0,1]^2$. Известно, что внешний квадрат линейного интегрального оператора можно рассматривать как линейный интегральный оператор, действующий в $C_0(M)$ (здесь M — треугольник, заданный неравенствами $0 \leq t \leq s \leq 1$, $C_0(M)$ — подпространство пространства $C(M)$, состоящее из всех функций $x(t_1, t_2)$, для которых $x(t_1, t_1) = 0$), с ядром, равным второму ассоциированному к ядру исходного оператора. Рассмотрим второе ассоциированное ядро к $k(t,s)$:

$$(k \wedge k)(t_1, t_2, s_1, s_2) = \begin{vmatrix} k(t_1, s_1) & k(t_1, s_2) \\ k(t_2, s_1) & k(t_2, s_2) \end{vmatrix} =$$

$$= k(t_1, s_1)k(t_2, s_2) - k(t_2, s_1)k(t_1, s_2) =$$

$$= (t_1 + 1 - s_1)(t_2 + 1 - s_2) - (t_1 + 1 - s_2)(t_2 + 1 - s_1) =$$

$$= t_1 s_1 - t_1 s_2 + t_2 s_2 - t_2 s_1 = (t_2 - t_1)(s_2 - s_1).$$

Легко видеть, что второе ассоциированное ядро $(k \wedge k)(t_1, t_2, s_1, s_2) = (t_2 - t_1)(s_2 - s_1)$ будет неотрицательным и неразложимым на $M \times M$, и следовательно, линейный интегральный оператор $A \wedge A$ будет неотрицательным и неразложимым относительно телесного конуса K_2 неотрицательных функций в $C_0(M)$.

Решая линейное интегральное уравнение

$$\int_0^1 (t + 1 - s)x(s)ds = \lambda x(t),$$

легко найти два положительных простых собственных значения A $\lambda_1 = \rho(A) = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$ и $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{6}}{6}$ и соответствующие им собственные функции: положительную $x^1(t) = \sqrt{6}t + 1$ и имеющую ровно одну перемену знака на $[0, 1]$ $x^2(t) = 1 - \sqrt{6}t$. Рассмотрим подпространство X_2^0 пространства $C_0(M)$, определяемое следующим образом:

$$X_2^0 = \{x^1 \wedge x : x \in C[0, 1]\} = \{(\sqrt{6}t + 1)x(s) - (\sqrt{6}s + 1)x(t) : x \in C[0, 1]\}.$$

Очевидно, что пересечение подпространства X_2^0 с конусом неотрицательных функций в $C_0(M)$ содержит ненулевые элементы (например, функцию $x^1 \wedge x^0$, где функция $x^0(t) \equiv -1$). Покажем, что *конус* $K_2^0 = K_2 \cap X_2^0$ *не будет телесным в подпространстве* X_2^0.

Доказательство. Передположим противное, пусть K_2^0 является телесным в X_2^0. Тогда существует такая функция $x_0(t) \in C[0, 1]$, что для некоторого $\epsilon > 0$ шар $B(x^1 \wedge x_0, \epsilon) \cap X_2^0$ принадлежит K_2^0. Допустим, функция $x_0(t)$ положительна в некоторой точке из $[0, 1]$. Тогда, не ограничивая общности рассуждения, можно полагать, что $x_0(t)$ положительна на всем $[0, 1]$. Рассмотрим произвольную функцию $x_\epsilon \in B(x_0, \frac{\epsilon}{3\|x^1\|})$. Для достаточно малых ϵ функция x_ϵ также будет положительна на $[0, 1]$. Покажем, что функция $x^1 \wedge x_\epsilon$ будет принадлежать $B(x^1 \wedge x_0, \epsilon)$. Действительно,

$$\|x^1 \wedge x_0 - x^1 \wedge x_\epsilon\| = \|x^1 \wedge (x_0 - x_\epsilon)\| \leq 2\|x^1\|\|x_0 - x_\epsilon\| < 2\|x^1\|\frac{\epsilon}{3\|x^1\|} < \epsilon.$$

Следовательно, функция $x^1 \wedge x_\epsilon$ будет неотрицательной на M. Т.е. при любых t, s $t \leq s$, будет справедливым неравенство:

$$(\sqrt{6}t + 1)x_\epsilon(s) - (\sqrt{6}s + 1)x_\epsilon(t) \geq 0.$$

Отсюда следует неравенство:

$$\frac{x_\epsilon(s)}{x_\epsilon(t)} \geq \frac{\sqrt{6}s + 1}{\sqrt{6}t + 1} \geq 1.$$

Как видно, функция x_ϵ является неубывающей на $[0, 1]$. Получено противоречие, т.к. x_ϵ — произвольная функция из $B(x_0, \frac{\epsilon}{3\|x_1\|})$. Аналогично доказывается невозможность случая $x_0(t) \leq 0$ на $[0, 1]$. Следовательно, K_2^0 не будет телесным в X_2^0. □

Целью настоящей статьи является более корректное изложение предложенной в [1] схемы, а также доказательство теоремы о существовании второго положительного собственного значения у линейного неотрицательного оператора при помощи другой схемы, отличной от предложенной в [1]. Для того, чтоба обойти вопрос о возможности построения реализации внешнего квадрата $X \wedge X$ полуупорядоченного банахова пространства X в виде полуупорядоченного банахова пространства с телесным конусом, ограничимся рассмотрением пространства непрерывных функций $C[a, b]$, для внешнего квадрата которого такая реализация существует (см., например, [5]).

2. Исследование

1. Тензорный и внешний квадрат оператора в пространстве $C[a, b]$. Пусть $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Напомним основные определения и утверждения, связанные с реализацией тензорного и внешнего квадрата пространства $C[a, b]$. Так, пространство $C[a, b]^2$ непрерывных на $[a, b]^2$ функций является одним из тензорных произведений пространства $C[a, b]$ на самого себя, а подпространство $C^a[a, b]^2$

непрерывных антисимметрических на $[a,b]^2$ функций— одним из внешних произведений пространства $C[a,b]$ на самого себя. Далее, пространство $C^a[a,b]^2$ изоморфно пространству $C_0(M)$ (здесь, как уже говорилось выше, M — треугольник, заданный неравенствами $0 \le t \le s \le 1$, $C_0(M)$ — подпространство пространства $C(M)$, состоящее из всех функций $x(t_1,t_2)$, для которых $x(t_1,t_1)=0$). Очевидно, $C_0(M)$ — полуупорядоченное пространство с телесным конусом K_2 неотрицательных функций.

Пусть A, B — действующие в пространстве $C[a,b]$ непрерывные линейные операторы. Этим операторам в пространстве $C[a,b]^2$ соответствует оператор $A \otimes B$, определенный следующим образом: на вырожденных функциях — равенством

$$(A \otimes B)x(t_1,t_2) = \sum_j Ax_1^j(t_1)\cdot Bx_2^j(t_2) \qquad \left(x(t_1,t_2) = \sum_j x_1^j(t_1)\cdot x_2^j(t_2)\right),$$

а на произвольных — как продолжение по непрерывности с подпространства вырожденных функций на все $C[a,b]^2$. Очевидно, будет справедливой оценка:

$$\|(A\otimes B)x(t_1,t_2)\| \le \|A\|\|B\|\,\|x(t_1,t_2)\|.$$

Далее рассмотрим оператор $A \wedge A : C^a[a,b]^2 \to C^a[a,b]^2$, определенный как сужение оператора $A \otimes A$ на подпространство $C^a[a,b]^2$. Очевидно, на вырожденных антисимметричных функциях оператор $A \wedge A$ может быть задан равенством

$$(A\wedge A)x(t_1,t_2) = \sum_j Ax_1^j(t_1)\wedge Ax_2^j(t_2) \qquad x(t_1,t_2) = \sum_j x_1^j(t_1), \wedge x_2^j(t_2).$$

2. Выделение в $C_0(M)$ подпространства X_2^0. Рассмотрим линейный вполне непрерывный оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$. Пусть A сильно положителен относительно конуса K неотрицательных функций в $C[a,b]$ (т.е. $AK \subseteq \mathrm{int}K$). В таком случае у A существует положительное собственное значение λ_1, равное спектральному радиусу $\rho(A)$, которому отвечает строго положительная собственная функция x^1 (см., например, [3]).

Выделим во внешнем квадрате $C_0(M)$ пространства $C[a,b]$ подпространство X_2^0 следующим образом:

$$X_2^0 = \{x^1 \wedge x : x \in [a,b]\}.$$

Легко видеть, что X_2^0 будет замкнутым подпространством пространства $C_0(M)$.

3. Выделение почти воспроизводящего клина $\widetilde{K}$ в пространстве $C[a,b]$. Рассмотрим в пространстве $C[a,b]$ множество $\widetilde{K}$, определяемое следующим образом:

$$\widetilde{K} = \{x \in C[a,b] : x^1 \wedge x \in K_2\}.$$

Покажем, что $\widetilde{K}$ является клином в $C[a,b]$. Действительно, выпуклость и замкнутость $\widetilde{K}$, а также включение $\beta x \in \widetilde{K}$ $(\beta > 0,\ x \in \widetilde{K})$ следуют из линейности внешнего произведения и соответствующих свойств конуса K_2. В то же время множество $\widetilde{K}$ не будет конусом, так как содержит прямую $\beta x^1,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Будет справедливой следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $x^1 \in C[a,b]$ — произвольная строго положительная функция. Тогда клин $\widetilde{K} = \{x \in C[a,b] : x^1 \wedge x \in K_2\}$, где K_2 — конус неотрицательных функций в $C_0(M)$, будет почти воспроизводящим в пространстве $C[a,b]$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $x \in C[a,b]$. Т.к. функция x^1 непрерывна и строго положительна, то функция $y = \frac{x}{x^1}$ также будет непрерывной. Так как подпространство $C^{(1)}[a,b]$ функций, имеющих непрерывную производную, плотно в $C[a,b]$, то для фунции $y = \frac{x}{x^1}$ найдется сходящаяся к ней по норме пространства $C[a,b]$ последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in C^{(1)}[a,b]$. Для любого $i = 1,2,\dots$ функция y_i имеет ограниченную вариацию и по теореме Жордана (см., например, [7], [8]) представима в виде разности $y_i = y_i^1 - y_i^2$, где $y_i^1,\ y_i^2$ — положительные неубывающие функции из $C[a,b]$. Рассмотрим последовательность функций $\{x^1 y_i\}_{i=1}^{\infty}$, которая, очевидно, сходится к функции x. Покажем, что для любого $i = 1, 2, \dots$ функция $x^1 y_i$ принадлежит $\widetilde{K} - \widetilde{K}$. Для этого представим $x^1 y_i$ следующим образом:

$$x^1 y_i = x^1 y_i^1 - x^1 y_i^2.$$

Покажем, что функции $x^1 \wedge x^1 y_i^k$ $(k = 1, 2)$ будут принадлежать K_2, т.е. будут неотрицательными на треугольнике M. Действительно:

$$x^1 \wedge x^1 y_i^k = x^1(t)x^1(s)y_i^k(s) - x^1(s)x^1(t)y_i^k(t) = x^1(t)x^1(s)(y_i^k(s) - y_i^k(t)) \geq 0$$

при любых t, s $t \leq s$, т.к. функция x^1 положительна, а функции y_i^k неубывают. □

4. Выделение почти воспроизводящего конуса в подпространстве X_2^0.

Рассмотрим пересечение K_2^0 конуса неотрицательных функций K_2 с подпространством X_2^0. Очевидно, K_2^0 будет конусом в X_2^0, инвариантным для оператора $A \wedge A$. Будет справедливой следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $x^1 \in C[a,b]$ — произвольная строго положительная функция. Тогда конус $K_2^0 = \{\varphi \in K_2 : \exists x \in C[a,b], \varphi = x^1 \wedge x\}$, где K_2 — конус неотрицательных функций в $C_0(M)$, будет почти воспроизводящим конусом в подпространстве $X_2^0 = \{x^1 \wedge x : x \in C[a,b]\}$.*

Доказательство. Пусть φ — произвольный элемент X_2^0. Рассмотрим функцию $x \in C[a,b]$, такую, что $\varphi = x^1 \wedge x$. По лемме 1 найдется последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \widetilde{K} - \widetilde{K}$, сходящаяся к x по норме пространства $C[a,b]$. Легко видеть, что последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $\varphi_i = x^1 \wedge x_i$ сходится к φ по норме пространства $C_0(M)$, а из построения клина $\widetilde{K}$ следует, что для любого $i = 1, 2, \dots$ элемент $\varphi_i = x^1 \wedge x_i$ принадлежит $K_2 - K_2$. □

Заметим, что в случае, когда функция x^1 имеет нули в $[a,b]$, лемма 2 может быть неверна.

5. Выделение почти воспроизводящего конуса в подпространстве X'. Рассмотрим в $C[a,b]$ множество $K' = \{x \in C[a,b] : \ x_1^*(x) = 0, \ x^1 \wedge x \in K_2^0\}$, где x_1^* — положительный собственный функционал оператора A^*, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \rho(A)$ (существование такого функционала также следует из [3]). Легко видеть, что K' будет конусом в подпространстве $X' = \{x \in C[a,b] : x_1^*(x) = 0\}$, инвариантным для сужения A' оператора A на подпространство X'.

Лемма 3. *Пусть $x^1 \in C[a,b], x_1^* \in rca[a,b]$ — произвольные положительные функции. Тогда конус $K' = \{x \in C[a,b] : \ x_1^*(x) = 0, \ x^1 \wedge x \in K_2\}$ будет почти воспроизводящим конусом в подпространстве $X' = \{x \in C[a,b] : x_1^*(x) = 0\}$.*

Доказательство. Действительно, пусть $x(t)$ — произвольная функция из подпространства X'. Покажем, что найдется последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in (K' - K')$, сходящаяся к x. Рассмотрим элемент $x^1 \wedge x \in X_2^0$. Так как K_2^0 является почти воспроизводящим конусом в X_2^0, то существует последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in C[a,b]$, такая, что $x^1 \wedge y_i \in K_2^0 - K_2^0$. Построим последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом: $x_i = y_i - x_1^*(y_i)x^1$. Легко видеть, что $x^1 \wedge x_i = x^1 \wedge y_i \in K_2^0 - K_2^0$. Также очевидно, что $x_1^*(x_i) = 0$, т.е. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in (K' - K')$. □

6. Теорема о существовании второго положительного собственного значения.

Сформулируем теорему о существовании второго положительного собственного значения у неотрицательного оператора в $C[a,b]$.

Теорема 1. *Пусть вполне непрерывный оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$ сильно положителен относительно конуса неотрицательных функций K в $C[a,b]$. Пусть его внешний квадрат $A \wedge A : C_0(M) \to C_0(M)$ оставляет инвариантным конус неотрицательных функций K_2 в $C_0(M)$, причем $\rho(A \wedge A) > 0$. Тогда у оператора A существует первое положительное собственное значение $\lambda_1 = \rho(A)$ и второе положительное собственное значение $\lambda_2 < \lambda_1$, которому отвечает собственная функция x^2, такая, что $x^1 \wedge x^2 \in K_2$.*

7. Первое доказательство теоремы о существовании второго положительного собственного значения.

Докажем теорему о существовании второго положительного собственного значения при помощи описанной выше схемы.

Доказательство. Из теоремы о сильно положительных операторах, примененной к оператору A, следует, что у оператора A имеются положительная собственная функция $x^1(t)$ и положительный собственный функционал $x_1^*(t)$, соответствующие простому собственному значению $\lambda_1 = \rho(A) > 0$. Построим по функционалу x_1^* подпространство $X' = \{x \in [a,b] : x_1^*(x) = 0\}$ и выделим в нем конус $K' = \{x \in C[a,b] :\ x_1^*(x) = 0,\ x^1 \wedge x \in K_2\}$. По лемме 3 конус K' будет почти воспроизводящим в подпространстве X'. Как уже было сказано выше, подпространство X' будет инвариантным для оператора A, а конус K' — инвариантным для сужения A' оператора A на подпространство X'. По обобщенной теореме Крейна-Рутмана (см. [6]), примененной к оператору A', у оператора A существует собственная функция $x_2 \in K'$, отвечающая собственному значению $\lambda_2 = \rho(A') > 0$. Из построения подпространства X' следует линейная независимость функций x^1 и x^2 и включение $x^1 \wedge x^2 \in K_2$. □

8. Второе доказательство теоремы о существовании второго положительного собственного значения.

Приведем другое доказательство теоремы 1, основанное на доказанной в работе [5] теореме о собственных значениях внешнего квадрата оператора, согласно которой всевозможные произведения вида $\{\lambda_i\lambda_j\}$ $(i < j)$, где $\{\lambda_i\}$ — все ненулевые собственные значения вполне непрерывного оператора A (с учетом кратности), образуют набор всех (кроме, быть может, нуля) собственных значений внешнего квадрата оператора $A \wedge A$ (с учетом кратности).

Доказательство. Занумеруем собственные значения вполне непрерывного оператора A в порядке убывания их модулей (с учетом кратности):

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

Из теоремы Крейна-Рутмана, примененной к вполне непрерывному оператору A следует, что $\lambda_1 = \rho(A) > 0$ является собственным значением A, которому отвечает собственная функция $x^1 \in K$. Из теоремы Крейна-Рутмана, примененной к оператору $A \wedge A$, который, очевидно, также является вполне непрерывным, следует, что $\rho(A \wedge A) > 0$ является собственным значением $A \wedge A$, которому отвечает собственная функция из K_2.

Как вытекает из утверждения теоремы о собственных значениях внешнего квадрата оператора, внешний квадрат оператора A не имеет других ненулевых собственных значений, кроме всевозможных произведений вида $\lambda_i\lambda_j$, где $i < j$. Следовательно, $\rho(A \wedge A) > 0$ представим в виде произведения $\lambda_i\lambda_j$ при некоторых значениях индексов i, j, $i < j$, а так как собственные значения занумерованы по убыванию, можно утверждать, что $\rho(A \wedge A) = \lambda_1\lambda_2$. Отсюда очевидно, что $\lambda_2 = \frac{\rho(A\wedge A)}{\lambda_1} > 0$. При этом, если $\rho(A \wedge A) = \lambda_1\lambda_2$ — простое собственное значение $A \wedge A$, отличное по модулю от других, то и λ_2 — простое собственное значение A, отличное по модулю от других. Далее, собственному значению $\rho(A \wedge A) = \lambda_1\lambda_2$ отвечает собственная функция $x^1 \wedge x^2$ и из теоремы Крейна-Рутмана вытекает, что $x^1 \wedge x^2 \in K_2$. □

Выводы

Полученные результаты обобщаются на случай операторов, действующих в идеальных пространствах, а также на случай операторов, действующих в пространствах функций, заданных на произвольном множестве $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, пользуясь полученными результатами можно описать собственную функцию оператора, соответствующую второму положительному собственному значению.

Список литературы

[1] Ладченко Я.С. *Существование вторых положительных собственных значений у линейных неразложимых операторов.* // Сборник научных трудов СевКавГТУ, естественнонаучная серия. – 2005. – N 1.

[2] Соболев А.В. *К теории вполне положительных матриц* // Сибирский математический журнал. – 1975. – Т. XVI, № 4. – с. 830-836.

[3] Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов* // М.: Наука. – 1985. – 256 с.

[4] Красносельский М.А., Соболев А.В. *О конусах конечного ранга* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 225, N 6. – с. 1256-1259.

[5] Забрейко П.П., Кушель О. Ю. *Теорема Гантмахера-Крейна для бинеотрицательных операторов в пространствах функций.* // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, N 3. – с. 9-15.

[6] Забрейко П.П., Смицких С.В. *Об одной теореме М.Г. Крейна — М.А. Рутмана.* // Функциональный анализ и его приложения. – 1979. – Т. 13, вып. 3. – с. 81-82.

[7] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* // М., “Наука”. – 1976. – 752 с.

[8] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III.* // М., “Наука”. – 1966. – 752 с.

[9] Tsoy-Wo Ma. *Classical analysis on normed spaces.* // World Scientific Publishing. – 1995. – 500 p.

[10] Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* // М., Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1950. – 550 с.

Белорусский государственный университет
пр-т Независимости, 4, 220050, Минск, Беларусь
E-mail: kushel@mail.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.928

В.Б. Левенштам

ТЕОРЕМА КАНТОРОВИЧА И ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИК [1]

Введение

Работа посвящена применению известной теоремы Л.В.Канторовича (см. [1]) об операторном варианте метода Ньютона для обоснования асимптотических разложений решений дифференциальных уравнений.Такой подход использовал в различных задачах В.И.Юдович со своими учениками (см., например, [2, 3]).Здесь он применяется для обоснования главного члена асимптотики (принцип усреднения) решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Такой же подход использован нами и при обосновании полной асимптотики решения, что будет изложено в другой работе. Отметим, что данная работа примыкает к статьям [4]–[7].

1. Постановка задачи и основной результат

Пусть D_0, D_1 — области пространства[2] $\mathbb{R}^n$ и пусть $\Omega_0 = \big\{(e,\tau)\colon e = (u,v) \in D_0 \times D_1,\ \tau \in\ R\big\}$, а $\Omega_1 = \big\{(u,\tau)\colon u \in D_0,\ \tau \in R\big\}$. Предположим, что вектор-функции $f_0(e,\tau)$ и $f_1(u,\tau)$, $f_2(u,\tau)$ определены на множествах Ω_0 и Ω_1 соответственно, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции $f_0(e,\tau)$, $f_1(u,\tau)$ и $f_2(u,\tau)$ непрерывны и при некотором $T > 0$ T-периодичны по τ. Кроме, того $f_0(e,\tau)$ дважды, а $f_1(u,\tau)$, $f_2(u,\tau)$ трижды дифференцируемы по e и u соответственно, причем все указанные производные непрерывны. Кроме того, эти производные удовлетворяют условию Липшица по e и u соответственно, причем константы Липшица не зависят от e, u и τ, когда e, u пробегают любой компакт в $D_0 \times D_1$ и в D_0 соответственно.

2. Средние $\langle f_i\rangle(u) \equiv \langle f_i(u,\tau)\rangle$, вектор-функции $f_i(u,\tau)$, $i = 1,2$, по τ равны нулю:

$$\langle f_i(u)\rangle = T^{-1}\int\limits_0^T f_i(u,\tau)\,d\tau = 0.$$

Рассмотрим задачу о $T\omega^{-1}$-периодических решениях дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = f_0(x,\dot{x},\omega t) + \omega^{1/2} f_1(x,\omega t) + \omega f_2(x,\omega t) \tag{1}$$

с большим параметром ω, в котором $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Наряду с возмущенным уравнением (1) будем рассматривать не зависящее от ω уравнение

$$\ddot{y} = \left\langle f_0\left(y, \dot{y} + \frac{\partial\varphi(y,\tau)}{\partial\tau}, \tau\right) + \frac{\partial f_2(y,\tau)}{\partial y}\varphi(y,\tau)\right\rangle \equiv \Psi(y,\dot{y}), \tag{2}$$

которое назовем усредненным. Здесь вектор-функция $w = \varphi(y,\tau)$ — T-периодическое по τ с нулевым средним ($\langle\varphi(y,\tau) = 0\rangle$) решение уравнения

$$\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial\tau^2} = f_2(y,\tau).$$

Относительно усредненного уравнения сделаем следующие предположения.

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00287).

[2] В $\mathbb{R}^n$ мы используем обычную евклидову норму: $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|^2$, где $x = (x_1,\ldots,x_n) \in\ \mathbb{R}^n$.

3. Уравнение (2) имеет стационарное решение $\overset{0}{y}$ ($\Psi(\overset{0}{y},0)=0$), такое что матрица $\frac{\partial\Psi(\overset{0}{y},0)}{\partial y}\equiv \Psi'_y(\overset{0}{y},0)$ — невырожденная. При этом, разумеется, предполагается, что $\overset{0}{y}\in D_0$, $\frac{\partial\varphi(\overset{0}{y},\tau)}{\partial\tau}\in D_1$, $\tau\in\mathbb{R}$. Здесь

$$\Psi'_y(\overset{0}{y},0) = \left\langle \frac{\partial f_0\Big(\overset{0}{y},\frac{\partial\varphi(\overset{0}{y},\tau)}{\partial\tau},\tau\Big)}{\partial u} + \frac{\partial f_0\Big(\overset{0}{y},\frac{\partial\varphi(\overset{0}{y},\tau)}{\partial\tau},\tau\Big)}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi(\overset{0}{y},\tau)}{\partial y\partial\tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_2(\overset{0}{y},\tau)}{\partial u}\frac{\partial\varphi(\overset{0}{y},\tau)}{\partial y} + \frac{\partial^2 f_2(\overset{0}{y},\tau)}{\partial u^2}\varphi(\overset{0}{y},\tau)\right\rangle,$$

$$\frac{\partial^2 f_2(\overset{0}{y},\tau)}{\partial u^2}\varphi(\overset{0}{y},\tau) = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f_2(u,\tau)}{\partial u}\varphi(\overset{0}{y},\tau)\right]\Bigg|_{u=\overset{0}{y}}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого положительного числа* $\overset{0}{r}$ *найдутся такие положительные числа* ω_0, r_0 *и* c_0, *что при* $\omega>\omega_0$ *уравнение (1) имеет единственное на множестве*

$$S^{\overset{0}{r}}_{r_0,\omega}\equiv\left\{x\in C^1(R):\ \|x-\overset{0}{y}\|_{C(R)}\leqslant r_0,\quad \left\|\dot x(t)-\frac{\partial\varphi(\overset{0}{y},\omega t)}{\partial\tau}\right\|_{C(R)}\leqslant\overset{0}{r}\right\}$$

$T\omega^{-1}$*-периодическое решение* x_ω, *и при этом справедлива оценка*

$$\|x_\omega-\overset{0}{y}\|_{C(R)} + \left\|\dot x_\omega(t)-\frac{\partial\varphi(\overset{0}{y},\omega t)}{\partial\tau}\right\|_{C(R)}\leqslant c_0\omega^{-1/2}.$$

2. Доказательство теоремы

В уравнении (1) произведем замену переменных Крылова–Боголюбова

$$x = y+\omega^{-1}\varphi(y,\omega t)+\omega^{-3/2}\varphi_1(y,\omega t), \tag{3}$$

$$\dot x = \dot y+\frac{\partial\varphi(y,\omega t)}{\partial\tau}+\omega^{-1/2}\frac{\partial\varphi_1(y,\omega t)}{\partial\tau}+$$
$$+\omega^{-1}\left[\frac{\partial\varphi(y,\omega t)}{\partial y}+\omega^{-1/2}\frac{\partial\varphi_1(y,\omega t)}{\partial y}\right]\dot y,$$

где $\varphi(y,\tau)$ — вектор-функция, введенная выше, а $\varphi_1(y,\tau)$ — T-периодическая по τ вектор-функция с нулевым по τ средним, удовлетворяющая равенству

$$\frac{\partial^2\varphi_1(y,\tau)}{\partial\tau^2}=f_1(y,\tau).$$

В результате придем к уравнению

$$\ddot y = f_0\left(y,\dot y+\frac{\partial\varphi(y,\omega t)}{\partial\tau},\omega t\right)+\frac{\partial f_2(y,\omega t)}{\partial y}\varphi(y,\omega t)-\frac{\partial^2\varphi(y,\omega t)}{\partial y\partial\tau}\dot y+$$
$$+R(y,\dot y,t,\omega)\equiv\psi(y,\dot y,\omega t)+R(y,\dot y,t,\omega). \tag{4}$$

Здесь R – малая величина, имеющая вид:

$$R(y,\dot y,t,\omega)=\left[(E+\beta\omega)^{-1}f_0\left(y+\alpha_\omega,\dot y+\frac{\partial\varphi(y,\omega t)}{\partial\tau}+\gamma_\omega,\omega t\right)-\right.$$
$$\left.-f_0\left(y,\dot y+\frac{\partial\varphi(y,\omega t)}{\partial\tau},\omega t\right)\right]+\omega^{1/2}(E+\beta\omega)^{-1}\Big\{[f_1(y+\alpha\omega,\omega t)-$$
$$-f_1(y,\omega t)]+\omega^{1/2}\left[f_2(y+\alpha\omega,\omega t)-f_2(y,\omega t)-\omega^{-1}\frac{\partial f_2(y,\omega t)}{\partial y}\varphi(y,\omega t)\right]-$$
$$-\omega^{-1}\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y\partial\tau}\dot y+\omega^{-1/2}\frac{\partial^2\varphi(y,\omega t)}{\partial y^2}\dot y^2+\omega^{-1}\frac{\partial^2\varphi_1(y,\omega t)}{\partial y^2}\dot y^2\right]\Big\}+$$
$$+[(E+\beta\omega)^{-1}-E]\left[\frac{\partial f_2(y,\omega t)}{\partial y}\varphi(y,\omega t)-\frac{\partial^2\varphi(y,\omega t)}{\partial y\partial\tau}\dot y\right],$$

$$\alpha_\omega = \omega^{-1}\varphi(y,\omega t) + \omega^{-3/2}\varphi_1(y,\omega t), \quad \beta_\omega = \omega^{-1}\frac{\partial\varphi(y,\omega t)}{\partial y} + \omega^{-3/2}\frac{\partial\varphi_1(y,\omega t)}{\partial y},$$

$$\gamma_\omega = \omega^{-1/2}\frac{\partial\varphi_1(y,\omega t)}{\partial\tau} + \beta_\omega\dot{y},$$

E — единичная матрица порядка n, $\frac{\partial^2\varphi(y,\tau)}{\partial y^2}u^2 = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\varphi(y,\tau)}{\partial y}u\right]u$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение множество V_ρ, $\rho > 0$, в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$V_\rho = \Big\{(y,v) \in D_0 \times D_1 : \ |y - \overset{0}{y}| + |v| \leqslant \rho\Big\}.$$

Выберем такие положительные числа ρ^*, T^* и ω^* (>1), что 1) при всех $(y,\dot{y}) \in V_{\rho^*}$, $\omega > \omega^*$ и $t \in \mathbb{R}$ векторы $(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, выраженные через y, $\dot{y}$, ω и t по формулам (3), принадлежат множеству $D_0 \times D_1$ и 2) спектр матрицы $t_\omega\Psi'_y(\overset{0}{y},0)$, где $t_\omega = [T\omega^{-1}T^*]T\omega^{-1}$, $\omega > \omega^*$, не содержит точек $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$.

В уравнении (4) сделаем замену переменных

$$y = u + \overset{0}{y},$$
$$\dot{y} = v,$$

после чего перепишем его в виде

$$\dot{u} - v = 0,$$

$$\begin{gathered}\dot{v} - \Psi'_y(\overset{0}{y},0)u - \Psi'_{\dot{y}}(\overset{0}{y},0)v = \psi(u+\overset{0}{y},v,\omega t) - \Psi'_y(\overset{0}{y},0)u - \\ - \Psi'_{\dot{y}}(\overset{0}{y},0)v + R(u+\overset{0}{y},v,t,\omega) \equiv \psi_1(u,v,\omega t) + R(u+\overset{0}{y},v,t,\omega) \equiv \\ \equiv z(u,v,t,\omega), \quad \|u\|_{C(R)} + \|v\|_{C(R)} \leqslant \rho^*.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь учтено равенство $\Psi(\overset{0}{y},0) = 0$. Задача о t_ω-периодических решениях уравнения (5) при $\omega > \omega^*$, как известно, эквивалентна дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} w(t) + (Q_\omega w)(t) \quad &\equiv \quad w(t) - (E - e^{t_\omega A})^{-1}\int\limits_0^{t_\omega} e^{(t-s)A}Z(w(s),s,\omega)\,ds - \\ &- \int\limits_0^{t} e^{(t-s)A}Z(w(s),s,\omega)\,ds = 0, \quad \|w\|_{C(R)} \leqslant \rho^*, \end{aligned} \tag{6}$$

где $w = \binom{u}{v}$, $Z(w,t,\omega) = \binom{0}{z(u,v,t,\omega)}$.

Лемма 1. *Для $\rho_0 < \rho^*$ найдутся такие положительные числа ω_2, r_2 и c_2, что при $\omega > \omega_2$ уравнение (6) имеет на множестве $V^{\rho_0}_{r_2}$: $\big\{\|u\|_{C(R)} \leqslant r_2, \ \|v\|_{C(R)} \leqslant \rho_0\big\}$ единственное t_ω-периодическое решение $w_\omega = \binom{u_\omega}{v_\omega}$, и при этом справедлива оценка*

$$\|u_\omega\|_{C(R)} + \|v_\omega\|_{C(R)} \leqslant c_2\omega^{-1/2}.$$

Введем некоторые обозначения.

Через $C^\alpha(R)$, $0 < \alpha < 1$, как обычно, обозначим пространство вектор-функций $u \in C(R)$, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{C^\alpha(R)} = \|u\|_{C(R)} + \sup_{-\infty < t_1 < t_2 < \infty}\frac{|u(t_2) - u(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\alpha} < \infty.$$

Через C_ω и C^α_ω, $\omega > 0$, $0 < \alpha < 1$, обозначим подпространства пространств $C(R)$ и $C^\alpha(R)$, соответственно, состоящие из t_ω-периодических вектор-функций этих пространств.

Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Лемма 1 справедлива при замене в её формулировке пространства $C(R)$ на $C^\alpha(R)$, $0 < \alpha < 1/2$.*

Для доказательства леммы 2 введем оператор $P_\omega(w)$ с областью определения S_{ρ_*}: $\|w\|_{C^\alpha} \leqslant \rho^*$, действующий в пространстве C^α_ω, $0<\alpha<1/2$, по правилу: $P_\omega(w)=w+Q_\omega(w)$, где $Q_\omega(w)$ — то же выражение, что и в (6).

Уравнение (6), рассматриваемое при $w \in S_{\rho^*}$, перепишем в форме операторного уравнения

$$P_\omega(w)=0.$$

Производные Фреше по $w=\binom{u}{v}$ первого и второго порядков оператора $P_\omega(w)$ имеют вид:

$$P'_\omega(w_0)w = w - \left(E-e^{t_\omega A}\right)^{-1}\int\limits_0^{t_\omega} e^{(t-s)A}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & 0\\ a & b\end{pmatrix} w(s)\,ds - \int\limits_0^t \dots\,ds \equiv w+Q'_\omega(w_0)w,\quad w_0=\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix},$$

$$a=\frac{\partial\psi(u_0+\overset{0}{y},v_0,\omega s)}{\partial u}-\Psi'_y(\overset{0}{y},0)+\frac{\partial R(u_0+\overset{0}{y},v_0,\omega s)}{\partial u},$$

$$b=\frac{\partial\psi(u_0+\overset{0}{y},v_0,\omega s)}{\partial v}-\Psi'_{\dot y}(\overset{0}{y},0)+\frac{\partial R(u_0+\overset{0}{y},v_0,\omega s)}{\partial v},$$

где многоточием, краткости ради, обозначено то же подинтегральное выражение, что и в предыдущем интеграле;

$$P''(w_0)(\overset{1}{w},\overset{2}{w}) = -(E-e^{t_\omega A})^{-1}\int\limits_0^{t_\omega} e^{(t-s)A}\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{K}(w_0(s))\left(\overset{1}{w}(s),\overset{2}{w}(s)\right)\end{pmatrix}ds+$$

$$+\int\limits_0^t \dots\,ds,$$

где

$$\mathcal{K}(w_0(s))\left(\overset{1}{w},\overset{2}{w}\right)=\left(\overset{2}{u}\frac{\partial}{\partial u_0}+\overset{2}{v}\frac{\partial}{\partial v_0}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\psi(u_0+\overset{0}{y},v_0,\omega s)}{\partial u}\overset{1}{u}+\frac{\partial R(u_0+\overset{0}{y},v_0,s,\omega)}{\partial u}\overset{1}{u}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\psi(u_0+\overset{0}{y},v_0,\omega s)}{\partial v}\overset{1}{v}+\frac{\partial R(u_0+\overset{0}{y},v_0,s,\omega)}{\partial v}\overset{1}{v}\right),$$

$$\overset{i}{w}=\begin{pmatrix}\overset{i}{u}\\ \overset{i}{v}\end{pmatrix},\quad i=1,2,\quad \overset{2}{u}\frac{\partial}{\partial u_0}=\sum_{i=1}^n \overset{2}{u}_i\frac{\partial}{\partial u_{0i}},\quad \overset{2}{v}\frac{\partial}{\partial v_0}=\sum_{i=1}^n\overset{2}{v}_i\frac{\partial}{\partial v_{0i}}.$$

Лемма 2 вытекает из теоремы Канторовича и следующего простого утверждения.

Лемма 3. *Существуют такие числа d_1, d_2 и d_3, что при $\omega>\omega^*$ выполняются неравенства*

$$\left\|P_\omega(0)\right\|_{C^\alpha(R)}\leqslant d_1\omega^{-1/2},\quad \left\|Q'_\omega(0)w\right\|_{C^\alpha(R)}\leqslant d_w\omega^{-1/2}\|w\|_{C^\alpha_\omega},$$

$$\left\|P''_\omega(w_0)(\overset{1}{w},\overset{2}{w})\right\|_{C^\alpha(R)}\leqslant d_3\left\|\overset{1}{w}\right\|_{C_\omega}\left\|\overset{2}{w}\right\|_{C_\omega},\quad w_0\in S_{\rho^*}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

[2] Срубщик Л.С., Юдович В.И. *Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины* // Докл. АН СССР – 1961. – Т.139, N.2. – с.341.

[3] Есипов А.А., Юдович В.И. *Асимптотика собственных значений первой краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений на длинном отрезке* // ЖВМ и МФ – 1974. – Т.14,N.2. – с.342-349.

[4] Левенштам В.Б. *Асимптотическое интегрирование дифференциальынх уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. I* // Дифференц. уравн. – 2005. – Т.41, N.6. – с.761-770.

[5] Левенштам В.Б. *Асимптотическое интегрирование дифференциальынх уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. II* // Дифференц. уравн. – 2005. – Т.41, N.8. – с.1084-1091.

[6] Абоод Х.Д. *К вопросу об асимптотике периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром* // Деп. в ВИНИТИ – 2005. – 8Б184Деп. – 43 с.

[7] Левенштам В.Б., Хатламаджиян Г.Л. *Распространение теории метода усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами* // Изв. вузов. Математика – 2006. – N.6 (529). – с.35-47.

Южный научный центр РАН
ул. Чехова, 41, 344006, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: vleven@math.rsu.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 519.8

В.А. Матвеев

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО КОНУСУ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

1. Многокритериальная задача: оптимальность по конусу

Рассматривается задача принятия решений в некоторой управляемой системе, качество решения в которой оценивается несколькими критериями. Такие критерии отражают различные качества объекта. В этом случае выбор производиться между альтернативами, являющимися носителями различных наборов полезных свойств. Фактически в этом случае проявляется неопределённость в выборе решений лицом, принимающего решение (ЛПР), относительно итоговой цели выбора. В классификации неопределённостей в исследовании операций она выделена как "неопределённость, отражающая нечёткость знания игроками своих целей" [1, с.17].

Перейдём к математической формализации, при этом используем терминологию и обозначения из [2]. Итак, рассматривается многокритериальная задача

$$\langle X, f(x) \rangle. \tag{1}$$

Здесь имеется один участник, принимающий решение (ЛПР). Задано множество допустимых альтернатив $x \in X$, из которых ЛПР делает свой выбор. Выделен конечный набор желаемых свойств, оцениваемых критериями. В рассматриваемой математической модели используются количественные критерии, которые представляются целевыми функциями: каждая функция оценивает одно свойство.

Обычно информацию о всех критериях объединяют в одну, векторную функцию $f : R^n \to R^m, m \geq 1$. Значения этой векторной функции каждой альтернативе ставят в соответствие количественную оценку для выделенных свойств $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$. Множество всех векторных оценок образуют множество векторных оценок или множество исходов$f(X) = \{f(x) \in R^n \mid x \in X\}$.

Не уменьшая общности, считаем, что критерии $f_i(x), i = 1, ..., m$, являются позитивными, т.е. ЛПР стремиться к их увеличению [3, с.55]. Тогда, на содержательном уровне, цель ЛПР состоит в выборе такого альтернативы, которая доставляет возможно большие значения одновременно всем компонентам векторной функции выигрыша$f(x)$. Отметим, что в соответствии с [3, с.12-13] множество X и векторная функция f определяют соответственно реализационную и оценочную структуры задачи принятия решения (1).

Используем обозначения из [2, с.7]:

$$R_> = \{x \in R^m \mid x_i > 0, i = 1, ..., m\};$$

$$R_\geq = \{x \in R^m \mid x_i \geq 0, i = 1, ..., m\};$$

$$x > y \Leftrightarrow x - y \in R_>;$$
$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in R_\geq.$$

В качестве решения многокритериальной задачи (1) можно рассматривать альтернативу, обладающую свойством, что её оценка не поддаётся улучшению по какому-либо критерию, иначе как за счёт ухудшения по какому-то другому критерию.

Альтернатива $x^* \in X$ в многокритериальной задаче (1) называется максимальной по Парето (эффективной), если $\forall x \in X$ из условия $f_i(x^*) < f_i(x)$ следует, что $f_j(x^*) > f_j(x)$ хотя бы при одном $j \in \{1, ..., m\}$. Парето - максимальность альтернативы $x^* \in X$ означает, что, если возможно перейти к другой альтернативе $x \in X$ и увеличить значение $i-$го критерия, то в этом случае обязательно найдётся другой $j-$ый критерий, значение по которому уменьшится. По другому это означает, что $\forall x \in X$ несовместна система неравенств $f(x) \geq f(x^*)$. Множество максимальных по Парето альтернатив обозначается X^P и множество соответствующих исходов - через $f(X^P)$.

Кандидатом на оптимальное решение в многокритериальной задаче может являться только Парето - оптимальная альтернатива. Но выделить среди паретовских решений один наилучший из условия многокритериальной задачи в общем случае достаточно сложно. Выбор такого наилучшего решения является уточнением оптимального по Парето решения.

Достаточно общий подход к определению оценочной структуры в (1) предлагают конусные отношения. В многокритериальных задачах такой подход представлен в [4, 5, 6]. Будем рассматривать выпуклый, острый, пространственный конус [7]. Конус порождает в векторном пространстве отношение порядка (векторную упорядоченность) $\geq_k$ по правилу

$$f \geq_k g \Leftrightarrow f - g \in K.$$

Такой конус называют конусом доминирования в $R^m, m \geq 1$. Часто рассматривается многогранный (полиэдральный) конус, который можно задать матрицей, именно,

$$K = \{f \in R^m \mid Af \geq 0_m\}. \tag{2}$$

Полагаем, что матрица является невырожденной и, в специально оговорённых случаях, неразложимой [8, с.352].

Определение 1. Альтернатива $x* \in X$ называется оптимальной по конусу K, если $\forall x \in X, x - x* \notin K$. Соответствующая оценка $f^* = f(x^*)$ - максимальным по конусу K исходом в задаче векторной оптимизации (1).

Теорема 1. *Пусть в многокритериальной задаче (1) множество альтернатив $X \subset R_m$ компактно, векторная функция выигрыша $f : X \to R^m$ непрерывна, конус доминирования K является выпуклым, острым, пространственным в R^m. Тогда в (1) существует альтернатива, оптимальная по конусу .*

Теорема 2. *Рассматривается многокритериальная задача (1) и конусы доминирования K_1 и K_2. Пусть $X_1^* \subset X$, $X_2^* \subset X$, множества альтернатив, оптимальных по конусу K_1 и K_2 соответственно. Тогда из $K_1 \subset K_2$ следует включение $X_2^* \subset X_1^*$.*

Пример. Рассматривается двухкритериальная задача, в которой множество допустимых альтернатив $X = R \times \Psi = [0, 1] \times [0, \pi/2]$ представлено на рис.1. Двухкритериальный выигрыш $f(r, \theta) = (f_1(r, \theta), f_2(r, \theta)) = (rcos\theta, rsin\theta)$ и область достижимости показана на рис.2. Задан многогранный конус доминирования

$$K = \{x \in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0_2\}. \tag{3}$$

Этот конус доминирования из (3) в пространстве R^2 приведён на рис.3.

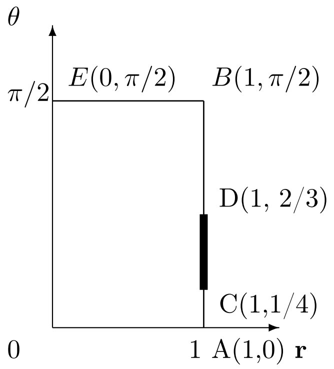

Рис.1

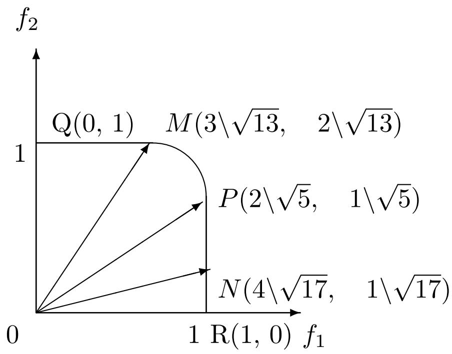

Рис.2

Отметим,что в данном случае важность (вес) критериев f_1 и f_2 оценивается первым экспертом в отношении 3:2 и вторым экспертом в отношении 4:1. В задаче требуется найти альтернативы, оптимальные относительно конуса , в соответствии с определением 1.

Рассмотрим оценки допустимых альтернатив, представленные на рис.2. Расположим конус доминирования в R^2 так, что его вершина совпадает с оценкой некоторой альтернативы. Если в этом случае множество точек конуса не пересекается с множеством оценок всех допустимых альтернатив (за исключением общей вершины), то соответствующая альтернатива является оптимальной по конусу . В соответствии с этим оптимальные по конусу альтернативы расположены на стороне AB (рис.1) и их оценки на дуге $QMPNT$ (рис.2). В этом случае $r* = 1$. Выделим на дуге оценки, оптимальные по конусу. Они расположены на участке дуги NM (рис.2). В пространстве критериев координаты точки N (точки M) находятся из условия

$$\frac{-f_1}{\sqrt{1-f_1^2}} = -\frac{4}{1} \qquad (\frac{-f_1}{\sqrt{1-f_1^2}} = -\frac{3}{2}).$$

В данном примере получены все максимальные по конусу K альтернативы

$$(r^*, \theta^*), r^* = 1, \arctan(1/4) \leq \theta^* \leq \arctan(2/3).$$

Они изображены отрезком CD на рис.1. Множество соответствующих оценок

$$(f_1^*, f_2^*) \in \{(r^* \cos\theta^*, r^* \sin\theta^*) | r^* = 1, \arctan(1/4) \leq \theta^* \leq \arctan(2/3)$$

отмечены дугой NM на рисунке 2.

Заметим, что в данной многокритериальной задаче максимальные по конусу решения являются уточнением максимальных по Парето решений. Действительно, паретовские альтернативы в задаче векторной оптимизации (1) представляются отрезком AB на рисунке 1 и их оценки - всей дугой $QMPNT$ на рисунке 2. В тоже время оптимальные по конусу K из (3) решения представляются точками отрезка CD на рис.1 и их образы - дугой NM на рис.2.

2. Уточнённое по последовательности конусов решение

Оптимальных по конусу решений может быть много. Тогда уточнение по конусу можно применить несколько раз, последовательно уточняя (улучшая) решение. Рассмотрим следующую последовательность уточнений. Пусть

$$A_1, A_2, ..., A_i, ..., i \in N. \tag{4}$$

последовательность невырожденных квадратных стохастических матриц. Каждая матрица из последовательности (4) будет уточнять многогранный конус аналогично (2). Полученная последовательность конусов позволит построить уточнённое по конусу решение многокритериальной задачи (1).
Результатом является новую последовательность матриц

$$A_1, A_2 \cdot A_1, ..., A_n \cdot A_{n-1} \cdot ... \cdot A_1, \qquad n \in N. \tag{5}$$

Для каждой матрицы из последовательности (5) определён многогранный конус аналогично (2) и множество оптимальных по этому конусу решений, согласно определению 1 в многокритериальной задаче (1).

Теорема 3. *Пусть матрицы $A_i, i \in N$, из последовательности (4) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда для любого натурального n*
а) матрица из последовательности (5) является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической;
б) для соответствующих конусов имеет место включение $K_n \subset K_{n+1}$;
в) для соответствующих множеств оптимальных по конусу решений задачи (1) имеет место включение $X_n^* \supset X_{n+1}^*$.

Для матриц из теоремы 3 верны условия теоремы Фробениуса [8, с.355], именно, выполнено

Теорема 4. *Пусть матрицы $A_i, i \in N$, из последовательности (4) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда существует предел последовательности матриц (5), т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} A_n \cdot A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_1 = A_0.$$

Матрица A_0 является положительной, вырожденной с рангом равным 1, все строки матрицы равны левому собственному вектору, относящемуся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$ и этот вектор можно выбрать так, что сумма его координат равна 1.

Последнее утверждение является основанием для уточнения оптимального решения в задаче (1), определённого последовательностью матриц (4).

Определение 2. Рассматривается многокритериальная задача (1) и последовательность неотрицательных, невырожденных, неразложимых, стохастических матриц (4). Пусть набор чисел

$$\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \qquad \sum\nolimits_{i=1}^m \alpha_i = 1, \qquad \alpha_i > 0.$$

представляет строку предельной матрицы A_0 из теоремы 4. Тогда альтернатива

$$x^* \in argmax(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_m f_m(x)) \tag{6}$$

будем называть уточнённым по последовательности конусов или по последовательность матриц (4) оптимальным (максимальным) решением многокритериальной задачи (1).

Теорема 5. *Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых альтернатив $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша $f : X \to R^m$ непрерывна, квадратные матрицы порядка m в последовательности (4) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда в задаче существует оптимальное уточнённое по последовательности матриц (4)решение.*

Существование уточнённого по последовательности матриц решения следует их компактности множества допустимых альтернатив X и непрерывности функции

$$f(x, \alpha) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_m f_m(x),$$

где $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$ есть строка предельной матрицы A_0, которая существует согласно теоремы Фробениуса [8, с.355].

Теорема 6. *Уточнённое по последовательности матриц (4) оптимальное (максимальное) решение в многокритериальной задачи (1) является оптимальным (максимальным) по Парето решением, более того, оно является оптимальным (максимальным) по любому конусу определённому матрицей из последовательности (5).*

Уточнение оптимального по Парето решения многокритериальной задачи (1) определяется последовательностью матриц (4). В частности такая последовательность может состоять из постоянных матриц, т.е. в (4) $A_i = A$, $i \in N$, где A- произвольная неотрицательная, невырожденная, неразложимая, стохастическая матрица. В этом случае последовательность матриц (5) составляют натуральные степени матрицы A. Суммируя результаты для данного частного случая, получаем

Теорема 7. *Пусть квадратная матрица порядка m является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда*
а) существует предел последовательности матриц

$$\lim_{n \to \infty} A^n = A_0.$$

б) предельная матрица A_0 является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической и все строки этой матрицы равны левому собственному вектору, относящемуся к максимальному собственному значению

$$\lambda = 1, \alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \qquad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \qquad \alpha_i > 0;$$

с) для последовательности матриц A^n, $n = 1, 2, ...,$ соответствующая последовательность многогранных конусов K_n, $n = 1, 2, ...,$ определённая аналогично (2), удовлетворяет цепочке включений

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset K_0;$$

д)соответствующая последовательность множеств, оптимальных по конусу $K_n, n = 1, 2, \ldots,$ решений в задаче векторной оптимизации (1) удовлетворяет включениям

$$X_1^* \supset X_2^* \supset X_3^* \supset \cdots \supset X_n^* \supset \cdots \supset X_0^*.$$

Если в определении 2 уточнение оптимального по Парето решения в многокритериальной задаче (1) проводится по последовательности многогранных конусов, определённых степенями неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической матрицы , то полученное решение будем называть уточнённым по конусу K решением многокритериальной задачи (1).

Уточнение оптимального по конусу решения позволяет в некоторых случаях выделить в задаче векторной оптимизации (1) единственную оптимальную альтернативу. Условия существования единственного, уточнённого по конусу решения формулируются с использованием вогнутости векторной функции цели [9, с.169].

Пусть множество допустимых альтернатив $X \subset R^n$ выпукло. Векторная функция векторного аргумента $f : X \to R^m, m \geq 1$, называется вогнутой (строго вогнутой) на множестве X, если каждая компонента этой функции является вогнутой (строго вогнутой) на этом множестве, т.е. для любых $i = 1, \ldots, m, x \neq y \in X$, выполнено неравенство

$$0,5(f_i(x) + f_i(y)) \leq f_i(0,5(x + y) \qquad (0,5(f_i(x) + f_i(y)) < f_i(0,5(x + y)).$$

Теорема 8. *Пусть в задаче векторной оптимизации (1) векторная функция $f : X \to R^m, m \geq 1$, будет вогнутой на компактном множестве $X \in R^n$ и найдётся, по крайней мере, одно $j = 1, 2, ..., m$, что скалярная функция $f_j(x)$ будет строго вогнутой на этом множестве, многогранный конус K определён квадратной матрицей A аналогично (2), которая является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда в задаче существует единственная уточнённая по конусу альтернатива.*

Согласно определению 2 уточнённым по конусу K оптимальным решением многокритериальной задачи (1) является альтернатива

$$x^* \in argmax_{x \in X}(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_m f_m(x)).$$

По теореме 8 матрица A однозначно определяет левый собственный вектор, относящийся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$. Это вектор $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0$. Тогда функция $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_m f_m(x)$ является строго вогнутой, т.к. такими же являются и функции $f_i(x), 1 = 1, ..., m$ и, по крайней мере, одна из них строго вогнута. Тогда последняя линейная комбинация представляет строго вогнутую функцию. Наконец, строго вогнутая функция достигает максимального значения на компактном множестве в единственной точке [9, с.150].

Пример (продолжение). Продолжим рассмотрение двухкритериальной задачи $\{X \times \Psi, \{f_1, f_2\}\}$. Конус доминирования представлен в (3). Его можно задать с помощью стохастической матрицы, которую, также как и в (3), обозначим A, т.е.

$$K = \{x \in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0_2\}.$$

Найдем предел последовательности матриц $\lim_{n\to\infty} A^n = A_0$. Наибольшее собственное значение матрицы есть $\lambda = 1$. Соответствующий левый собственный вектор $x = (1/3, 2/3)$. Тогда по теореме 7 матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с определением 2, уточнённым по конусу максимальным решением многокритериальной задачи (1) будут решения задачи математического программирования (задача максимизации)

$$\{[0, 1] \times [0, \pi/2], 2r \cos\theta + r \sin\theta\}.$$

Здесь максимальное значение достигается при $r^\# = 1, \theta^\# = \arctan 1/2$. На рис.1 это решение представлено точкой $F(1, \arctan 1/2)$. В пространстве образов на рис.2 ему соответствует точка $P(2/\sqrt(5), 1/\sqrt(5))$.Таким образом, уточнённое по конусу (3) решение многокритериальной задачи (1) будет единственным и векторный выигрыш в этом случае $f^\# = (f_1^\#, f_2^\#) = (0, 4472, 0, 8944)$.

3. Пропорция потребления и накопления в регионе

Большое значение имеет задача определения наилучшей пропорции между потреблением и накоплением (инвестированием в развитие). Аналогичная модель для двух регионов и управляющим параметром - распределением инвестиций между регионами, рассматривалась в [10, с.627-638]. Там же обсуждение этого и подобных примеров. Отличие представленной здесь модели в том, что результат управления оценивается двумя критериями.

Пусть выпуск продукции региона обозначается Y и зависит от капитала по правилу

$$Y = bK,$$

где K обозначает капитал и $1/b$ - постоянное отношение капитала к выпуску. Отметим, что капитал и выпуск продукции являются функциями времени. Так как изменение капитала происходит от инвестиций, сделанных в экономику региона, то учитывая предыдущее, имеем,

$$\frac{dK}{dt} = sY = sbK. \tag{7}$$

Здесь мы предполагаем, что склонность к накоплению в регионе s переменная от времени и $0 \leq s \leq$. Задан начальный капитал

$$K(0) = K^0 > 0. \tag{8}$$

Рассматриваются два критерия, оценивающих качество функционирования системы: первый описывает потребление в регионе, второй - инвестирование в производство. Именно

$$J_1 = \int_0^1 (1-s)bKdt, \tag{9}$$

$$J_2 = bK(1). \tag{10}$$

Таким образом, проблема оптимальной пропорции между потреблением и накоплением анализируется в рамках двухкритериальной динамической задачи

$$\{ \quad \sum, \quad U, \quad J(t_0, K^0, s(t) \quad \}. \tag{11}$$

Здесь управляемая система представлена начальной дифференциальной задачей (7)-(8). Моменты начала $t_0 = 0$ и окончания процесса $t_1 = 1$ заданы, т.е. $t \in [0,1]$. Управлением может быть любая кусочно - непрерывная функция

$$u = u(t) : [0,1] \to [0,1],$$

стеснённая условием $u(t) \in [0,1]$. Множество таких функций представлено в (11), как U. Векторный критерий $J(t_0, K^0, u(t)) = (J_1(t_0, K^0, u(t)), J_2(t_0, K^0, u(t)))$ и его компоненты приведены в (9) и (10). Отметим, что двухкритериальная задача (11) является динамической многокритериальной линейно - квадратичной задачей, как это определено в [11].

Специалисты оценивают только важность критериев, не используя иную информацию из условия задачи. Пусть, например, имеются два мнения. С одной точки зрения важность критериев относится как 2:3, а с другой - как 3:5. Такое суждение экспертов задаёт двухгранный конус аналогично (2) и определяющая его матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тот же конус K_1 задаёт стохастическая матрица, которую так же обозначим

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Согласно определения 1 можно описать оптимальные относительно конуса A_1 решения. В данном случае это будет бесконечное множество решений, которое можно уточнить согласно определения 2. Для стохастической матрицы (12)это уточнение можно определить с помощью левого собственного вектора, относящегося к максимальному собственному значению $\lambda = 1$. Для матрицы A_1 соответствующий левый собственный вектор можно выбрать $\mu = (1, 1, 6)$. Тогда, согласно (6), стратегия называется уточнённым по конусу решением многокритериальной задачи (11), если

$$s^* \in argmax(J_1(s) + 1,6J_2(s)). \tag{13}$$

Таким образом, нахождение уточнённого по конусу K_1 максимального управления в двухкритериальной задаче (11) сводится к решению динамической задачи

$$\{ \quad \sum, \quad U, \quad J_{K_1}(t_0, K^0, s(t) \quad \}. \tag{14}$$

которая отличается от задачи (11) только критерием. Именно, в (14)используется скалярный функционал

$$J_{K_1}(t_0, K^0, s(t)) = J_1(s) + 1,6J_2(s). \tag{15}$$

и J_1 и J_2из (9) и (10) соответственно. Далее при анализе проблемы соотношения потребления и накопления в экономической политике региона будем использовать более общий функционал. Именно,

$$J_{K_1}(t_0, K^0, s(t)) = J_1(s) + \beta J_2(s). \tag{16}$$

и $\beta \in R$. Отметим, что (15) получается из (16) при $\beta = 1,6$.
Для решения динамической задачи (14) используем необходимые условия существования оптимального решения по рецептам принципа максимума Понтрягина [12, 13].
Во - первых, выпишем гамильтониан для динамической задачи (7),(8),(15). Аналогично [10, p.629] получаем

$$H = \psi \cdot s \cdot b \cdot K + 1 \cdot (1 - s) \cdot b \cdot K. \tag{17}$$

Во - вторых, находим максимум гамильтониана по управлению, т.е.

$$\max_{s \in U}(\psi \cdot s \cdot b \cdot K + 1 \cdot (1 - s) \cdot b \cdot K).$$

Так как гамильтониан является линейной функцией управления $s \in [0, 1]$, то имеем оптимальное управление

$$s^* = \begin{cases} 1, & \psi \geq 1, \\ 0, & \psi < 1 \end{cases} \tag{18}$$

Получили релейное управление. Уточним момент переключения в (18). Рассмотрим уравнение для двойственной переменной ψ из условия

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial K}.$$

Из (16)и условий трансверсальности находим дифференциальное уравнение и краевое условие

$$\dot{\psi} = -s \cdot b \cdot \psi - (1 - s) \cdot b, \tag{19}$$

$$\psi(1) = \beta \cdot b. \tag{20}$$

Здесь и далее для простоты изложения и анализа результатов, будем считать, что $b = 1$. Для других значений b рассуждения аналогичны.
Задачу (19), (20) решим в двух случаях. Во - первых, в (18) выберем $s^* = 1$ при $\psi \geq 1$. Тогда из (19), (20) получим

$$\dot{\psi} = -s \cdot \psi,$$
$$\psi(1) = \beta.$$

Решением последней задачи Коши является

$$\psi = \beta \cdot e^{x \cdot (1-t)},$$

при условии

$$\psi = \beta \cdot e^{b \cdot s \cdot (1-t)} \geq 1.$$

Тогда в данном случае $\psi = \beta \cdot e^{x \cdot (1-t)} \geq 1$ будет верно для любых $t \in [0, 1]$ и $s \in [0, 1]$. Напомним, что $\beta = 1,6$.
Во - втором случае в (18) выберем $s^* = 0$ при $\psi < 1$. Тогда из (19), (20), с учётом $b = 1$, получим

$$\dot{\psi} = -1,$$
$$\psi(1) = \beta.$$

Эта задача Коши имеет единственное решение

$$\psi = -t + \beta + 1.$$

Проверяем условие $\psi < 1$, т.е.

$$-t + \beta + 1 < 1.$$

Последнее неравенство несовместно для любого $t \in [0, 1]$. Отметим, что $\beta = 1,6$. Итак, для уточнённого по конусу K_1 решения двухкритериальной задачи (11) оптимальное управление является постоянным,$s^* = 1$ в течении всего процесса $t \in [0, 1]$. Траекторию экономической системы (т.е. закон изменения капитала) можно найти из (7), (8), которые с учётом принятых соглашений примут вид

$$\dot{K} = K,$$

$$K(0) = K^0.$$

Последняя задача имеет единственное решение

$$K = K^0 \cdot e^t.$$

Проведённый анализ позволяет указать оптимальное относительно конуса K_1 значение векторного функционала

$$J(t_0, K^0, u^*(t)) = (J_1(t_0, K^0, u^*(t)), J_2(t_0, K^0, u^*(t))) = (0, e \cdot K^0) \approx (0, 2,71 \cdot K^0)),$$

где $J_1(\cdot), J_2(\cdot)$, определены в(9), (10)соответственно.

Смысл полученного решения в том, что весь капитал, создающийся в экономической системе, следует направлять в производство в форме новых инвестиций, а потребление поддерживать на минимально допустимом уровне. Такое решение является оптимальным с позиций экспертов и их мнений, представленных в матрице A_1 в (12).

Рассмотрим решение двухкритериальной задачи (11), если предпочтения экспертов относительно критериев противоположны, рассмотренному выше случаю. Точнее, пусть первый эксперт считает, что важность критериев J_1 из (9)и J_2 из (10) относятся, как 3:2. Второй эксперт оценивает важность критериев, как 5:3. Такие мнения экспертов определяют матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

и соответствующий двухгранный (полиэдральный) конус доминирования K_2, аналогично (2). Тот же конус K_2 задаёт стохастическая матрица, которую так же обозначим

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Согласно определения 1 можно определить оптимальные относительно конуса K_2 решения. В данном случае это будет бесконечное множество решений, которое можно уточнить согласно определения 2. Для стохастической матрицы (21) это уточнение можно определить с помощью левого собственного вектора, относящегося к максимальному собственному значению $\lambda^* = 1$. Для матрицы A_2 соответствующий левый собственный вектор можно выбрать $\eta = (1, 0,625)$. Тогда, согласно (6), стратегия $s^*(t) \in U$ называется уточнённым по конусу K_2 решением многокритериальной задачи (11), если

$$s^* \in argmax(J_1(s) + 0,625 J_2(s)). \tag{22}$$

Таким образом, нахождение уточнённого по конусу K_2 максимального управления в двухкритериальной задаче (11) сводится к решению динамической задачи

$$\{ \quad \sum, \quad U, \quad J_{K_2}(t_0, K^0, s(t) \quad \}. \tag{23}$$

которая отличается от задачи (11) и (14) только критерием. Именно, в (23) используется скалярный функционал

$$J_{K_2}(t_0, K^0, s(t)) = J_1(s) + 0,625 J_2(s). \tag{24}$$

и J_1 и J_2 из (9) и (10) соответственно.

Для решения динамической задачи (23) используем необходимые условия существования оптимального решения по рецептам принципа максимума Понтрягина [12, 13].

Во - первых, выпишем гамильтониан для динамической задачи (7), (8), (24). Аналогично [10, с.629] получаем в точности (17). Во - вторых, находим максимум гамильтониана по управлению, т.е. Так как гамильтониан является линейной функцией управления $s \in [0, 1]$, то имеем оптимальное управление (18). Это релейное управление

$$s^* = \begin{cases} 1, & \psi \geq 1, \\ 0, & \psi < 1 \end{cases}$$

Уточним момент переключения в (18). Рассмотрим уравнение для двойственной переменной из условия

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial K}$$

Из (17) и условий трансверсальности находим дифференциальное уравнение и начальное условие

$$\dot{\psi} = -s \cdot \psi - (1 - s),$$
$$\psi(1) = \beta.$$

Напомним, что по прежнему считаем $b = 1$.
Полученная начальная задача аналогична задаче (19), (20). Отличие в том, что в данном случае $\beta = 0,625$. Решим последнюю начальную задачу в двух случаях. Во - первых, в (18) выберем $s^* = 0$ при $\psi < 0$. Действительно, начальное условие в данном случае $\psi(1) = \beta = 0,625 < 1$.
Итак в (18) выберем $s^* = 0$ при $\psi < 1$. Тогда из (19), (20), с учётом $b = 1$, получим

$$\dot{\psi} = -1,$$
$$\psi(1) = \beta.$$

Эта задача Коши имеет единственное решение

$$\psi = -t + \beta + 1.$$

Проверяем условие $\psi < 1$, т.е.

$$-t + \beta + 1 < 1.$$

Последнее неравенство выполнено для любого $t \in [0, 1]$. Отметим, что $\beta = 0,625$. Итак, для уточнённого по конусу K_2 решения двухкритериальной задачи (11) часть оптимального управления является постоянная,$s^* = 0$ для времени $t \in [\beta, 1]$. Найдем значение этого решения на границе

$$\psi(\beta) = 1.$$

Выпишем краевую задачу для случая $s^* = 1$ при $\psi \geq 1$. Тогда из (19), (20) получим

$$\dot{\psi} = -\psi$$
$$\psi(\beta) = 1.$$

Решением последней задачи Коши является

$$\psi = e^{\beta - t}$$

при условии

$$\psi = e^{\beta - t} \geq 1.$$

Тогда в данном случае $\psi = e^{\beta - t} \geq 1$ будет верно для любых $t \in [0, 1]$ и $s \in [0, \beta]$. Напомним, что $\beta = 0,625$. Итак, получено оптимальное управление

$$s^* = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \beta, \\ 0, & \beta \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Траекторию экономической системы (т.е. закон изменения капитала) можно найти из (7), (8), которые с учётом принятых соглашений примут вид

$$\dot{K} = K,$$
$$K(0) = K^0.$$

Последняя задача имеет единственное решение

$$K = K^0 \cdot e^t.$$

Проведённый анализ позволяет указать оптимальное относительно конуса K_2 значение векторного функционала

$$J(t_0, K^0, u^*(t)) = (J_1(t_0, K^0, u^*(t)), J_2(t_0, K^0, u^*(t))) = \\ = (K^0 \cdot (e^{13/8} - e^{10/8}), 0) \approx (1,5581 \cdot K^0, 0), \tag{25}$$

где $J_1(\cdot), J_2(\cdot)$, определены в(9), (10) соответственно.
Смысл полученного решения в том, что вначале весь капитал инвестируется в производство. За время $t \in [0, 0, 625]$ он возрастает с начальной величины $K(0) = K^0$ до величины $K(0, 625) = e^{0,625} \cdot K^0$. И уже этот "расширенный"капитал весь направляется на развитие сферы потребления. Такое оптимальное решение вырабатывается на основании предпочтений экспертов, представленных в стохастической матрице (21).

Список литературы

[1] Жуковский В.И. Кооперативные мгры при неопределённости и их приложения. М: Эдиториал УРСС, 1999.

[2] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

[3] Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. Москва: Книжный дом "Университет Высшая школа, 2002.

[4] Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. -М.: Физматлит, 2002.

[5] Матвеев В.А. Содержательный смысл конусного решения в антагонистической игре с векторным выигрышем. Математика в вузе. Труды международной научно - методической конференции. Псков 21 - 23 сентября 2006 г. С-Пб, 2004. - С.134-136.

[6] Матвеев В.А. Существование и единственность уточнённого по конусу решения многокритериальной задачи. Труды псковского политехнического института 10.1. Естествознание и математика. Гуманитарные науки. Псков: Изд-во ППИ, 2006. С.24 -27.

[7] Математическая энциклопедия/ Гл. ред. И.М.Виноградов, т.2. - М.: Советская энциклопедия, 1982. -1184.

[8] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. -576 с.

[9] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1980.

[10] Takayama A. Mathematical Economics. New York: Cambrige Univ. Press, 1994. -737 p.

[11] Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Риски и исходы в иногокритериальных задачах управления. Москва - Тбилиси: Интеллект, 2004. -358 с.

[12] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. Москва: высшая школа, 2001. -239 с.

[13] Пантелеев В.И.,Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. Москва: Высшая школа, 2003. -583 с.

Псковский государственный педагогический университет
пл.Ленина, 2, ул. Оршанская, 3, 180000, Псков, Россия
E-mail: matveev176@rambler.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.983 : 519.21 MSC2000: 34G10 : 60G20

И.В. Мельникова, М.А. Альшанский [1]

ГАУССОВСКИЙ БЕЛЫЙ ШУМ С ТРАЕКТОРИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $S'(H)$

Введение

В основе анализа белого шума (см, например, [1] — [4]) лежит теорема Бохнера – Минлоса. Она утверждает, что для любого непрерывного положительно определенного функционала $\phi : S \to \mathbb{R}$, где S — пространство Шварца быстроубывающих основных функций, на $\mathcal{B}(S')$ борелевской σ-алгебре подмножеств S' существует единственная вероятностная мера μ, для которой ϕ является характеристическим функционалом, то есть такая, что

$$\int\limits_{S'} e^{i\langle\omega,\theta\rangle}\, d\mu(\omega) = \phi(\theta)\ . \tag{1}$$

Мера, получающаяся при $\phi(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}$ является распределением вероятностей гауссовского белого шума. Обобщенный случайный процесс $\{W(\omega,\theta)\,|\ \ \theta \in S\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, где $\Omega = S'$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(S')$, $P = \mu$, определенный равенством $W(\omega,\theta) = \langle\omega,\theta\rangle$, называется гауссовским белым шумом. Равенство (1), в частности, означает, что для любого $\theta \in S$ случайная величина $\langle\cdot,\theta\rangle : \Omega \to \mathbb{R}$ является гауссовской с математическим ожиданием 0 и отклонением $\|\theta\|_{L_2(\mathbb{R})}$. При этом на элементы пространства S' можно смотреть как на траектории ($\mathbb{R}$-значного) белого шума.

В настоящей работе построен гауссовский белый шум, траектории которого принадлежат пространству $S'(H)$ обобщенных функций над S со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Это позволило построить решение линейного дифференциально-операторного уравнения с аддитивным белым шумом как обобщенный случайный процесс с траекториями в пространстве экспоненциальных распределений и получить его характеристический функционал.

1. Постановка задачи

Пусть H — некоторое сепарабельное гильбертово пространство. $S'(H)$ — пространство H-значных обобщенных функций над S. Его элементы — линейные непрерывные операторы, действующие из S в H. Действие $\omega \in S'(H)$ на $\theta \in S$ будем обозначать через $\omega(\theta)$. По аналогии с $\mathbb{R}$-значным случаем, возьмем $S'(H)$ в качестве пространства траекторий H-значного белого шума. Пусть Q — обратимый симметрический положительный ядерный оператор в H. Обобщенный H-значный случайный процесс $\{\mathbf{W}(\omega,\theta)\,|\,\theta \in S\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, где $\Omega = S'(H)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(S'(H))$ будем называть гауссовским Q-белым шумом, если для любого $\theta \in S$ случайная величина $\mathbf{W}(\cdot,\theta) : \Omega \to H$ является гауссовской с математическим ожиданием 0 и ковариационным оператором Q. Таким образом, мы приходим к задаче построения на $\mathcal{B}(S')$ вероятностной меры μ_Q такой, что для любого $h \in H$

$$\int\limits_{S'(H)} e^{i(\omega(\theta),h)_H}\, d\mu_Q(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L_2(\mathbb{R})}(Qh,h)_H}\ . \tag{2}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 06-03-00148

2. Исследование

Обозначим через S_0 пространство $L_2(\mathbb{R})$. Норму в $L_2(\mathbb{R})$ будем обозначать через $|\cdot|_0$. Пусть $A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$. Для любого $p \in \mathbb{N}$ положим $S_p := D(A^p)$, оснащенное нормой $|\theta|_p = |A^p\theta|_0$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_p$. Известно, что пространство $S = \bigcap_{p=0}^{\infty} S_p$ — ядерное счетно-гильбертово пространство, оснащенное топологией проективного предела. Пусть S_{-p} — сопряженное к S_p пространство. Оно совпадает с пополнением S_0 по норме $|\cdot|_{-p}$, заданной равенством $|\theta|_{-p} = |A^{-p}\theta|_0$. Через $(\cdot,\cdot)_{-p}$ будем обозначать соответствующее скалярное произведение. Известно, что $S' = \bigcup\limits_{-p\in\mathbb{N}} S_p$ с топологией индуктивного предела. При этом справедливы вложения:

$$S \subset \dots \subset S_{p+1} \subset S_p \subset \dots \subset S_0 \subset \dots S_{-p} \subset S_{-p-1} \subset \dots \subset S' .$$

Рассмотрим тензорные произведения гильбертовых пространств $S_p \otimes H$, $p \in \mathbb{Z}$. Скалярное произведение в $S_p \otimes H$ будем обозначать через $[\cdot,\cdot]_p$. Для любого $p \in \mathbb{Z}$ справедливо вложение $S_{p+1} \otimes H \subset S_p \otimes H$. Определим $S \otimes H$ как $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} (S_p \otimes H)$ с топологией проективного предела, а $S' \otimes H$ — как $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} (S_p \otimes H)$ с топологией индуктивного предела. Будем обозначать через $[\omega,\zeta]$ действие $\omega \in S' \otimes H$ на $\zeta \in S \otimes H$.

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H. Для любого $\omega \in S'(H)$ положим

$$J\omega := \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \otimes e_j ,$$

где $\omega_j \in S'$ определен равенством $\langle \omega, \theta \rangle = (\omega(\theta), e_j)_H$. Нетрудно проверить, что $J : S'(H) \to S' \otimes H$ — гомеоморфизм. Это означает, в частности, что отображение J переводит борелевскую σ-алгебру в $S'(H)$ в борелевскую σ-алгебру в $S' \otimes H$.

В дальнейшем, будем отождествлять $\omega \in S'(H)$ с $J\omega \in S' \otimes H$ и использовать то же обозначение. Таким образом, будем писать

$$\omega(\theta) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \otimes e_j\Big)(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \omega_j, \theta \rangle e_j .$$

Для того, чтобы построить на $S'(H)$ меру, удовлетворяющую условию (2), сначала построим соответствующую меру на $S' \otimes H$. Для этого воспользуемся теоремой Минлоса. Приведем здесь ее формулировку.

Теорема 1 (Минлос, [4], теорема 4.6.)**.** *Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство, $B : X \to X$ — положительный симметрический ядерный оператор. Пусть X_- — пополнение X по норме*

$$\|x\|_- = \|B^{1/2}x\| = (Bx,x)^{1/2} , \textit{где } (x,y)_- = (Bx,y) ,$$

$X_+ := B^{1/2}(X)$ со скалярным произведением $(x,y)_+ = (B^{-1}x,y)$ и нормой $\|x\|_+ = \|B^{-1/2}x\|$.

Тогда для любого непрерывного положительно-определенного функционала ϕ на X существует единственная конечная борелевская мера μ на X_-, такая что

$$\int\limits_{X_-} e^{i\langle x,z\rangle} \mu(dz) = \phi(x) , \quad x \in X_+ , \quad z \in X_- . \tag{3}$$

где $\langle x,z\rangle = (x, B^{-1}z)_-$ — каноническая билинейная форма на $X_+ \times X_-$.

Теорема 2. *Пусть Q — обратимый симметрический положительный ядерный оператор в H. Существует единственная вероятностная мера $\mathfrak{m}_Q$ на $(S' \otimes H, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $S' \otimes H$, такая, что*

$$\int\limits_{S'\otimes H} e^{i[\omega,\zeta]} \, d\mathfrak{m}_Q(\omega) = e^{-\frac{1}{2}[(I\otimes Q)\zeta,\zeta]_0} , \quad \zeta \in S \otimes H . \tag{4}$$

Доказательство. Для любого $p \in \mathbb{Z}$ оператор A^{-1}, обратный к $A := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$ является оператором Гильберта – Шмидта, как оператор из : S_p в S_{p+1} и осуществляет изометрический изоморфизм этих пространств. С помощью теоремы Рисса отождествим S_p и S_{-p}. Положим $R = A^{-1}(A^{-1})^*$. Тогда R — ядерный оператор и $R^{1/2} = A^{-1} = (A^{-1})^*$.

Пусть $H_{1/2} = Q^{1/2}(H)$ с нормой $\|x\|_{1/2} = \|Q^{-1/2}x\|_H$, порожденной скалярным произведением $(x,y)_{1/2} = (Q^{-1}x, y)_H$, $H_1 = Q(H)$ с нормой $\|x\|_1 = \|Q^{-1}x\|_H$, порожденной скалярным произведением $(x,y)_1 = (Q^{-1}x, Q^{-1}y)_H$. Рассмотрим тензорное произведение гильбертовых пространств $X = S_p \otimes H_{1/2}$. Пусть $B : X \to X$ задан равенством $B = R \otimes Q$. Очевидно, B — положительный, симметричный с $\mathrm{Tr}B = \mathrm{Tr}R \cdot \mathrm{Tr}Q < \infty$.

Пусть теперь пространства X_+ и X_- определены как в теореме Минлоса. Тогда $X_+ = S_{p+1} \otimes H_1$, $X_- = S_{-p-1} \otimes H$ Рассмотрим функционал ϕ, заданный на X равенством

$$\phi(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{S_0 \otimes H_{1/2}}} .$$

Он является положительно-определенным и непрерывным. Тогда, по теореме 1, существует единственная конечная борелевская мера $\mathfrak{m}_Q$ на $S_{-p-1} \otimes H$ такая, что

$$\int\limits_{S_{-p-1}\otimes H} e^{i\langle\omega,\theta\rangle}\, d\mathfrak{m}_Q(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{S_0\otimes H_{1/2}}} , \quad \theta \in S_{p+1} \otimes H_1 . \tag{5}$$

Для $\theta = \xi \otimes x$, где $\xi \in S_{p+1}$, $x \in H_1$ и $\omega = \varphi \otimes y$, где $\varphi \in S_{-p-1}$, $y \in H$, имеем

$$\langle\omega,\theta\rangle = \langle\varphi,\xi\rangle(y, Q^{-1}x)_H = \left[\omega, (I \otimes Q^{-1})\theta\right] ,$$

$$\|\theta\|^2_{S_0\otimes H_{1/2}} = \|\xi\|^2_{S_0}\|x\|_{1/2} = \|\xi\|^2_{S_0}(Q^{-1}x, x)_H = \|(I \otimes Q^{-1})\theta\|^2_{S_0\otimes H} .$$

Таким образом, равенство (5) можно переписать в виде

$$\int\limits_{S_{-p-1}\otimes H} e^{i[\omega,(I\otimes Q^{-1})\theta]}\, d\mathfrak{m}_Q(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\|(I\otimes Q^{-\frac{1}{2}})\theta\|^2_{S_0\otimes H}} , \quad \theta \in S_{p+1} \otimes H_1 .$$

Так как $I \otimes Q : S_{p+1} \otimes H \to S_{p+1} \otimes H_1$ — биекция, это эквивалентно условию

$$\int\limits_{S_{-p-1}\otimes H} e^{i[\omega,\theta]}\, d\mathfrak{m}_Q(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\|(I\otimes Q^{\frac{1}{2}})\theta\|^2_{S_0\otimes H}} , \quad \theta \in S_{p+1} \otimes H . \tag{6}$$

В силу того, что $S' \otimes H = \bigcup_p S_{-p} \otimes H$, $S \otimes H = \bigcap_p S_p \otimes H$, из равенства (6) следует утверждение теоремы.

□

Замечание 9. Из доказательства теоремы следует, что для любого $p \geq 1$, $\mathfrak{m}_Q(S_{-p} \otimes H) = 1$.

Пусть $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $S'(H)$. Поскольку $\mathfrak{B} = J(\mathcal{B})$, положим для любого $A \in \mathcal{B}$, $\mu_Q(A) = \mathfrak{m}_Q(J(A))$.

Таким образом, нами построено вероятностное пространство $(S'(H), \mathcal{B}, \mu_Q)$.

Справедливо следующее

Предложение 1. *Для любых $\theta \in S$, $h \in H$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S'(H)} e^{i(\omega(\theta),h)_H} d\mu_Q(\omega) = e^{-\frac{1}{2}|\theta|_0^2 (Qh,h)_H} . \tag{7}$$

Доказательство. Действительно, пусть $\omega \in S'(H), \theta \in S, h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j e_j \in H$. Тогда

$$(\omega(\theta), h)_H = \left(\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \otimes e_j \Big)(\theta), h \right)_H = \sum_{j=1}^{\infty} \langle\omega_j, \theta\rangle h_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle\omega_j, h_j\theta\rangle = [\omega, \theta_h] ,$$

где $\theta_h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \theta \otimes e_j \in S \otimes H$, так как для любого $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} |h_j\theta|_p^2 = |\theta|_p^2 \sum_{j=1}^{\infty} h_j^2 < \infty .$$

Поэтому мы получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{S'(H)} e^{i(\omega(\theta),h)_H} d\mu_Q(\omega) &= \int\limits_{S'\otimes H} e^{i[\omega,\theta_h]} d\mathfrak{m}_Q(\omega)\\ &= e^{-\frac{1}{2}[(I\otimes Q)\theta_h,\theta_h]_0} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j^2|h_j\theta|_0^2}\\ &= e^{-\frac{1}{2}|\theta|_0^2(Qh,h)_H}\,.\end{aligned}$$

□

Таким образом, обобщенный случайный процесс $\{\mathbf{W}(\omega,\theta)\,|\,\theta\in S\}$ на вероятностном пространстве $(S'(H),\mathcal{B}(S'(H)),\mu_Q)$, заданный равенством $\mathbf{W}(\omega,\theta)=\omega(\theta)$, является гауссовским Q-белым шумом.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Для любых $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n\in S$ и $h_1,h_2,\dots,h_n\in H$, таких, что матрица $C=((\theta_i,\theta_j)_0(Qh_i,h_j)_H)_{i,j=1}^n$ невырождена, случайная величина*

$$\omega\mapsto((\omega(\theta_1),h_1)_H,\dots,(\omega(\theta_n),h_n)_H)$$

имеет плотность распределения

$$\lambda_{\theta_1,\dots,\theta_n}^{h_1,\dots,h_n}(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|C|}}\,e^{-\frac{1}{2}(C^{-1}x,x)}\,,$$

Эквивалентно, для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R}^n,\lambda_{\theta_1,\dots,\theta_n}^{h_1,\dots,h_n})$

$$E\left[f((\omega(\theta_1),h_1)_H,\dots,(\omega(\theta_n),h_n)_H)\right]=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\lambda_{\theta_1,\dots,\theta_n}^{h_1,\dots,h_n}(x)dx\,. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\hat f$ — преобразование Фурье f:

$$\hat f(y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(x,y)}dx\,.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat f(y)e^{i(x,y)}dy\,.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}&E\left[f((\omega(\theta_1),h_1)_H,\dots,(\omega(\theta_n),h_n)_H)\right]=\\ &=\int\limits_{S'(H)} f((\omega(\theta_1),h_1)_H,\dots,(\omega(\theta_n),h_n)_H)d\mu_Q(\omega)=\\ &=\int\limits_{S'(H)}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat f(y)\,e^{i\sum_{i=1}^n(\omega(\theta_i),h_i)_H y_i}dy\,d\mu_Q(\omega)=\\ &=\int\limits_{S'\otimes H}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat f(y)\,e^{i\sum_{i=1}^n[\omega,\theta_i\otimes h_i]y_i}dy\,d\mathfrak{m}_Q(\omega)=\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat f(y)\int\limits_{S'\otimes H} e^{i\left[\omega,\sum_{i=1}^n(\theta_i\otimes h_i)y_i\right]}d\mathfrak{m}_Q(\omega)dy\,.\end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (4), получаем:

$$\begin{aligned}&E\left[f((\omega(\theta_1),h_1)_H,\dots,(\omega(\theta_n),h_n)_H)\right]=\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat f(y)\,e^{-\frac{1}{2}[(I\otimes Q)\sum_{i=1}^n(\theta_i\otimes h_i)y_i,\sum_{i=1}^n(\theta_i\otimes h_i)y_i]_0}dy=\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat f(y)\,e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n y_iy_j[(I\otimes Q)(\theta_i\otimes h_i),(\theta_j\otimes h_j)]_0}dy=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n y_i y_j (\theta_i,\theta_j)_0 (Qh_i,h_j)_H} dy = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx\, \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)-\frac{1}{2}(Cy,y)} dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|}\, e^{-\frac{1}{2}(C^{-1}x,x)} dx\,.
\end{aligned}
$$

Так как $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^1(\mathbb{R}^n, \lambda_{\theta_1,\ldots,\theta_n}^{h_1,\ldots,h_n})$, отсюда следует утверждение леммы. □

Рассмотрим пространство $L_2(S'(H), H)$ интегрируемых по Бохнеру с квадратом функций из $S'(H)$ в H. Пусть базис $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ пространства H состоит из собственных векторов оператора Q. Через σ_j^2 будем обозначать соответствующие собственные значения. Имеем:

$$
\mathrm{Tr} Q = \sum_j \sigma_j^2 < \infty\,.
$$

Из соотношения (8) следует, что для любого $\theta \in S$ и любого $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{j=1}^n (\omega(\theta), e_j)_H^2\right) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{j=1}^n \sigma_j^2 \|\theta\|_0^2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\|\theta\|_0^2 \sigma_j^2}} dx_1 \ldots dx_n = \\
&= \|\theta\|_0^2 \sum_{j=1}^n \sigma_j^2\,.
\end{aligned}
$$

По теореме Фату мы можем перейти в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$. Получим

$$
\|\mathbf{W}(\theta,\cdot)\|_{L_2(S'(H),H)}^2 = \|\theta\|_0^2 \mathrm{Tr} Q\,. \tag{9}
$$

Определим на $(S'(H), \mathcal{B}, \mu_Q)$ случайный процесс $\{\mathbf{B}(t) \mid t \geq 0\}$ равенством

$$
\mathbf{B}(t)(\omega) = \omega(\chi_{[0;t]}) := \lim_{n\to\infty} \omega(\theta_n)\,, \tag{10}
$$

где предел берется в $L^2(S'(H); H)$, а $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty \subset S$ — произвольная последовательность, сходящаяся к $\chi_{[0;t]}$ в $L^2(\mathbb{R})$. Существование предела (10) и его независимость от выбора последовательности $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty \subset S$ следуют из (9). Нетрудно проверить, что $\mathbf{B}(t)$ — Q-винеровский процесс. Его траектории с вероятностью 1 — непрерывные H-значные функции. В результате, μ_Q-почти всюду для любой $\theta \in S$ имеем:

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} \mathbf{B}(t)\theta'(t)dt &= -\int_{\mathbb{R}} \omega(\chi_{[0;t]})\theta'(t)dt = \omega\Big(-\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0;t]}(s)\theta'(t)dt\Big) \\
&= \omega\Big(-\int_s^\infty \theta'(t)dt\Big) = \omega(\theta) = \mathbf{W}(\theta,\omega)\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\mathbf{W}$ является обобщенной производной $\mathbf{B}(t)$ (в смысле пространства $S'(H)$) μ_Q-почти всюду.

Пусть процесс $\mathbf{B}_0(t)$ определен равенством

$$
\mathbf{B}_0(t) = \begin{cases} \mathbf{B}(t)\,, & t \geq 0\,, \\ 0\,, & t < 0\,. \end{cases}
$$

Его траектории непрерывны с вероятностью 1. Определим обобщенный стохастический процесс $\mathbf{W}_0$, положив $\mathbf{W}_0(\theta,\omega) = \mathbf{B}_0'(\theta)$, где производная определена в обобщенном смысле:

$$
\mathbf{W}_0(\theta,\omega) = -\int_{\mathbb{R}} \mathbf{B}_0(t)\theta'(t)dt = -\int_0^\infty \mathbf{B}(t)\theta'(t)dt\,.
$$

Будем называть $\mathbf{W}_0$ Q-белым шумом с носителем $[0,\infty)$.

3. Приложения к уравнениям с аддитивным шумом

В дальнейшем будем обозначать через $D'_+(X)$ пространство X-значных распределений с ограниченными снизу носителями над пространством основных функций D.

Пусть X и Y — сепарабельные гильбертовы пространства. Рассмотрим уравнение

$$P * U = F + B\mathbf{W}_0\,, \tag{11}$$

где $P \in D'_+\left(\mathcal{L}(X;Y)\right)$, $U \in D'_+(X)$, $F \in D'_+(Y)$, $B \in \mathcal{L}(H;Y)$ а $\mathbf{W}_0$ — H-значный Q-белый шум с носителем $[0;\infty)$, определенный выше. Пусть операторнозначное распределение P имеет обратное относительно свертки распределение $G \in D'_+\left(\mathcal{L}(Y;X)\right)$. Тогда обобщенный случайный процесс $\{U(\theta,\omega) \mid \theta \in D\}$, определенный равенством

$$U(\theta,\omega) := (G * F)(\theta) + (G * B\mathbf{W}_0)(\theta,\omega)\,, \tag{12}$$

является единственным решением уравнения (11). Свертка $G * B\mathbf{W}_0$ определена для почти всех $\omega \in S'(H)$ в силу того, что носитель $B\mathbf{W}_0(\cdot,\omega)$ ограничен снизу μ_Q-почти всюду (см. [6]).

Рассмотрим теперь важный пример P, возникающий в теории дифференциально-операторных уравнений. Пусть A — замкнутый линейный оператор, действующий в Y, а $X = [D(A)]$ — область определения A с нормой графика. Тогда

$$P = \delta' \otimes I - \delta \otimes A \in D'_+\left(\mathcal{L}(X;Y)\right)\,. \tag{13}$$

Пусть $F \in D'_+(Y)$ определено равенством

$$F(\theta) := \theta(0)x + \int_0^\infty \theta(t)f(t)dt\,, \quad \theta \in D\,, \quad f \in L_1^{loc}(\mathbb{R},Y)\,,\ x \in Y\,.$$

Тогда решения уравнения $P * U = F$ называются обобщенными решениями задачи Коши

$$u'(t) = Au(t) + f(t)\,, \quad t > 0\,, \qquad u(0) = x \quad \text{(см. [6]).}$$

Рассмотрим соответствующее стохастически возмущенное уравнение (11) с P, заданным равенством (13). Пусть A в (13) является генератором полугруппы класса C_0 $\{S(t) \mid t \geq 0\}$. Тогда для P обратным относительно свертки является операторнозначное распределение

$$G(\theta) = \int_0^\infty \theta(t)S(t)dt\,.$$

Оно принадлежит классу экспоненциальных распределений $S'_a(\mathcal{L}(Y,X)) \subset D'_+(\mathcal{L}(Y,X))$: $S'_a(\mathcal{L}(Y,X)) := \{S \in D'_+(\mathcal{L}(Y,X)) \mid e^{-at}S \in S'(\mathcal{L}(Y,X))\}$. В этом случае формула (12) принимает вид

$$\begin{aligned} U(\theta,\omega) \;&=\; \int_0^\infty \theta(t)S(t)x\,dt + \int_0^\infty\int_0^t S(t-s)f(s)ds\;\theta(t)dt \\ &-\; \int_0^\infty\int_0^t S(t-s)B\omega\left(\chi_{[0;s]}\right)ds\;\theta'(t)dt\,, \quad \theta \in D. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в правой части этого равенства — детерминированная часть решения, а третье представляет собой реакцию на шум $\mathbf{W}_0$ линейной системы, описываемой уравнением (11).

Соотношение (4) позволяет построить характеристический функционал $\mathbb{R}$-значного обобщенного случайного процесса $\{(U(\theta,\omega),y)_Y \mid \theta \in D\}$ для любого $y \in Y$.

Пусть $\theta \in D$, $y \in Y$. Тогда

$$\int_{S'(H)} e^{i\left(U(\theta,\omega),y\right)_Y} d\mu_Q(\omega) = e^{i\left((G*F)(\theta),y\right)_Y} \int_{S'(H)} e^{i\left((G*B\mathbf{W}_0)(\theta,\omega),y\right)_Y} d\mu_Q(\omega) =$$

$$e^{i\left((G*F)(\theta),y\right)_Y - \frac{1}{2}\left\|\int_0^\infty dt\,\theta'(t)\int_0^t \chi_{[0,s]}(\cdot)Q^{\frac{1}{2}}B^*S^*(t-s)y\,ds\right\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)}}.$$

Отсюда следует, что случайная величина $\big(U(\theta,\omega),y\big)_Y$ является гауссовской с математическим ожиданием $\big((G*F)(\theta),y\big)_Y$ и дисперсией $\left\|\int_0^\infty dt\,\theta'(t)\int_0^t \chi_{[0,s]}(\cdot)Q^{\frac{1}{2}}B^*S^*(t-s)y\,ds\right\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)}$.

Список литературы

[1] Hida T. *Brownian Motion* // Springer-Verlag – 1980

[2] Holden H., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T. *Stochastic Partial Differential Equations. A Modelling, White Noise Functional Approach* // Birkhauser – 1996.

[3] Kuo H.-H. *White Noise Distribution Theory* // CRC Press – 1996.

[4] Huang Z., Yan J. *Introduction to Infinite Dimentional Stochastic Analysis* // Science Press – 1997.

[5] Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A. *Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions* // Journal of Mathematical Sciences – 2003. – Vol. 116, N.5. – c.3620-3656.

[6] Fattorini H.O. *The Cauchy problem* // Cambridge University Press – 1992.

Уральский госуниверситет – УрГУ
пр. Ленина 51, 620083, Екатеринбург, Россия
E-mail: `Irina.Melnikova@usu.ru`

Уральский государственный технический университет – УПИ
ул. Мира, 19, 620002, Екатеринбург, Россия
E-mail: `mxa2@yandex.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 551.466.8

В.О. Подрыга, А.А. Слепышев

МОДУЛЯЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗАХВАЧЕННЫХ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ВОЛН

Введение

Асимптотическим методом многомасштабных разложений исследуются нелинейные эффекты при распространении захваченных топографических волн. Определяется среднее течение, индуцированное волной, во втором порядке малости по амплитуде волны. Получено эволюционное уравнение для огибающей — нелинейное уравнение Шредингера. Исследуется модуляционная неустойчивость этих волн. Показано, что захваченные топографические волны модуляционно неустойчивы.

1. Постановка задачи

Нелинейные эффекты при распространении пакетов как поверхностных, так и внутренних волн проявляются в генерации средних на масштабе волны течений [1], [2]. Огибающая узкоспектрального волнового пакета удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера (НУШ). Поверхностные волны на глубокой воде модуляционно неустойчивы [2], модуляционная неустойчивость внутренних волн существенно перемежаема по масштабам. В длинноволновом пределе внутренние волны устойчивы к продольной модуляции.

В настоящей работе рассматриваются захваченные наклонным дном топографические волны в приближении Буссинеска и при реальной стратификации. Исходная система нелинейных уравнений гидродинамики для волновых возмущений решается асимптотическим методом многомасштабных разложений. В первом порядке малости по крутизне волны находятся решения линейного приближения и дисперсионное соотношение. Во втором порядке малости находятся решения для второй гармоники и среднее течение, индуцированное волной за счёт нелинейности. Из условия разрешимости краевой задачи, определяющей вертикальную структуру решения третьего приближения, следует эволюционное уравнение для огибающей — НУШ.

Система уравнений движения для волновых возмущений в приближении Буссинеска с учетом вращения Земли имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + 2[\vec{\Omega}\times\vec{u}] = -\frac{\nabla \mathrm{P}}{\rho_0} + \vec{g}\frac{\rho}{\rho_0},\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\rho + u_3\frac{d\rho_0}{dx_3} = 0,\\
&\nabla\vec{u} = 0,
\end{aligned}\tag{1}$$

где $\vec{u}$, ρ, P — волновые возмущения скорости течения, плотности и давления; $\rho_0(x_3)$ — средняя невозмущенная плотность. Ось x_1 направлена вдоль изобат, ось x_2 направлена в сторону уменьшения глубины. Систему уравнений (1) необходимо дополнить граничными условиями "твердой крышки" на поверхности и плоском наклонном дне, $u_3|_{x_3=H} = 0$, $(\vec{u}\cdot\vec{n})|_{x_3=0} = 0$.

2. Исследование

Систему уравнений (1) будем решать методом многомасштабных разложений, раскладывая u_i, P, ρ в асимптотические ряды

$$\begin{aligned} u_i &= \varepsilon u_i^I(x_3,\xi,\tau,\theta) + \varepsilon^2 u_i^{II}(x_3,\xi,\tau,\theta) + \ldots, \\ P &= \varepsilon P^I(x_3,\xi,\tau,\theta) + \varepsilon^2 P^{II}(x_3,\xi,\tau,\theta) + \ldots, \\ \rho &= \varepsilon \rho^I(x_3,\xi,\tau,\theta) + \varepsilon^2 \rho^{II}(x_3,\xi,\tau,\theta) + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

где ε — малый параметр — крутизна волны, ξ и τ медленные переменные, $\xi = \varepsilon(x_1 - c_g t)$, $\tau = \varepsilon^2 t$, θ — фаза волны, $\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = k$, $\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\omega$ (k — волновое число, ω — частота, $c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ — линейная групповая скорость, предполагается, что волна распространяется вдоль изобат).

В первом порядке малости по крутизне волны u_i^I, P^I, ρ^I можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u_i^I &= u_{i0}^I(x_3)A(\xi,\tau)e^{i\theta} + \text{к.с.}, \\ P^I &= P_{i0}^I(x_3)A(\xi,\tau)e^{i\theta} + \text{к.с.}, \\ \rho^I &= \rho_{i0}^I(x_3)A(\xi,\tau)e^{i\theta} + \text{к.с.} \end{aligned}$$

(к.с. означает комплексно-сопряженные члены). Связь функций $u_{10}^I(x_3)$, $u_{20}^I(x_3)$, $P_{10}^I(x_3)$, $\rho_{10}^I(x_3)$, $u_{30}^I(x_3)$ известна [3], а $u_{30}^I(x_3)$ удовлетворяет краевой задаче по определению вертикальной структуры моды в линейном приближении:

$$\begin{aligned} &\omega^2\left(k^2 - \frac{d^2}{dx_3^2}\right)u_{30}^I + f^2\frac{d^2u_{30}^I}{dx_3^2} + \frac{g}{\bar\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx_3}k^2u_{30}^I = 0, \\ &u_{30}^I\,|_{x_3=H} = 0\ , \\ &\frac{f}{k\omega}tg(\gamma)\frac{du_{30}^I}{dx_3}\,|_{x_3=0}\, = u_{30}^I\,|_{x_3=0}\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь γ — характерный уклон дна.

Решение второго приближения будем искать в виде:

$$u_3^{II} = u_{31}^{II}(\xi,\tau,x_3)e^{i\theta} + u_{32}^{II}(\xi,\tau,x_3)e^{2i\theta} + \text{к.с.} + \bar u_3^{II}(\xi,\tau,x_3), \tag{4}$$

где $\bar u_3^{II}(\xi,\tau,x_3)$ — неосциллирующая на временном масштабе волны поправка к вертикальной скорости. Подставляя (4) в (1), получим, что $u_{31}^{II} = u_{31}^{0II}(x_3)\frac{\partial A}{\partial\xi}$, $u_{32}^{II} = u_{32}^{0II}(x_3)A^2$, причем u_{31}^{0II} и u_{32}^{0II} удовлетворяют краевым задачам:

$$\begin{aligned} &\left[\omega^2\left(k^2 - \frac{d^2}{dx_3^2}\right) + f^2\frac{d^2}{dx_3^2} + gk^2\frac{d\rho_0}{\rho_0 dx_3}\right]\ u_{31}^{0II} = \\ &\qquad = i\left[-2\omega c_g\left(-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2}\right)\ u_{30}^I + 2gk\ \frac{u_{30}^I}{\bar\rho_0}\ \frac{d\rho_0}{dx_3}\ + 2\,k\,\omega^2 u_{30}^I\right], \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &u_{31}^{0II}\Big|_{x_3=H} = 0, \\ &\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{k}\omega}\mathrm{tg}(\gamma)\ \frac{du_{31}^{0II}}{dx_3}\Bigg|_{x_3=0} = u_{31}^{0II}\Big|_{x_3=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[4\omega^2\left(4k^2 - \frac{d^2}{d\,x_3^2}\right) + f^2\frac{d^2}{d\,x_3^2} + \frac{4g}{\bar\rho_0}\ \frac{d\rho_0}{d\,x_3}k^2\right]u_{32}^{0II} = -4\,k^2\frac{g}{\bar\rho_0}\ \left(u_{10}^I\,k\,i\ \rho_{10}^I + \ u_{30}^I\frac{d\,\rho_{10}^I}{d\,x_3}\right) + \\ &\qquad + \frac{d}{d\,x_3}\left[2f\,k\,i\ \left(u_{10}^I\,k\,i\,u_{20}^I + \ u_{30}^I\frac{d\,u_{20}^I}{d\,x_3}\right) + 4\,\omega\,k\ \left(\left(u_{10}^I\right)^2k\,i + u_{30}^I\frac{d\,u_{10}^I}{d\,x_3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &u_{32}^{0II}\Big|_{x_3=H} = 0, \\ &\frac{\mathrm{f}}{4\mathrm{k}\omega}\mathrm{tg}(\gamma)\ \frac{du_{32}^{0II}}{dx_3}\Bigg|_{x_3=0} = u_{32}^{0II}\Big|_{x_3=0}\,. \end{aligned}$$

Условием разрешимости краевой задачи (5) является ортогональность правой части уравнения функции u_{30}^{I} соответствующей однородной краевой задачи (3), отсюда следует выражение для c_g, которое совпадает с полученным непосредственно из уравнения (3) [3]:

$$c_g = \frac{\int\limits_0^H (k\omega^2 - kN^2)(u_{30}^{I})^2 dx_3}{\omega \int\limits_0^H [(-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2})u_{30}^{I}]u_{30}^{I} dx_3}. \tag{7}$$

Решение уравнения третьего приближения будем искать в виде суммы разложения по степеням $e^{i\theta}$ и неосциллирующего слагаемого $\tilde{u}_3\,(x_3, \tau, \xi)$:

$$u_3^{III} = \ u_{31}^{III}\,(x_3, \tau, \xi)\ e^{i\theta} + u_{32}^{III}\,(x_3, \tau, \xi)\ e^{2i\theta} + u_{33}^{III}\,(x_3, \tau, \xi)\ e^{3i\theta} + k.c. + \ \tilde{u}_3\,(x_3, \tau, \xi)\,. \tag{8}$$

Подставляя (7) в уравнение третьего приближения и приравнивая члены при $e^i\theta$, получим уравнение для u_{31}^{III}

$$\begin{gathered}-\omega^2 \left(-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2}\right)\ u_{31}^{III} + \frac{gk^2}{\overline{\rho}_0}\quad \frac{d\rho_0}{dx_3}\ u_{31}^{III} + f^2 \frac{d^2 u_{31}^{III}}{dx_3^2}\ = S_1 A_\tau + S_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \ S_3 A^2 A^*, \\ u_{31}^{III}\big|_{x_3=H} = 0, \\ \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{k}\omega}\mathrm{tg}(\gamma)\ \frac{du_{31}^{III}}{dx_3}\bigg|_{x_3=0} = \ u_{31}^{III}\big|_{x_3=0}\,.\end{gathered} \tag{9}$$

Однородная краевая задача, соответствующая (8), имеет нетривиальное решение, когда ω, k удовлетворяет дисперсионному соотношению. Следовательно, краевая задача (8) разрешима, если правая часть уравнения ортогональна решению уравнения (3) [5], отсюда следует эволюционное уравнение для огибающей (НУШ)

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} - i\frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + iT\left|A^2\right| A = 0, \tag{10}$$

$$q = -\frac{2}{i}\frac{\int\limits_0^H u_{30}^{I} S_2 dx_3}{\int\limits_0^H u_{30}^{I} S_1 dx_3}, \quad T = \frac{\int\limits_0^H u_{30}^{I} S_3 dx_3}{i\int\limits_0^H u_{30}^{I} S_1 dx_3}.$$

Неосциллирующая на периоде волны поправка к средней плотности и скорость индуцированного течения определяются по формулам:

$$\begin{gathered}\overline{u}_3 \cong 0,\ \ \overline{u}_2 \cong 0, \\ \overline{u}_1 = -\frac{1}{f}\frac{\partial \overline{u_2 u_3}}{dx_3} = -\frac{2}{\omega k}\frac{d}{dx_3}\left(u_{30}\frac{du_{30}}{dx_3}\right)\left|A^2\right|\varepsilon^2, \\ \overline{\rho} = \frac{d}{dx_3}\left(\frac{u_{30}^2}{\omega^2}\frac{d\rho_0}{dx_3}\right)\left|A^2\right|\varepsilon^2.\end{gathered}$$

Уравнение (10) — нелинейное уравнение Шредингера, принадлежащее к классу вполне интегрируемых систем. Уравнение (10) допускает частное решение в виде огибающей слабонелинейной плоской волны $A = A_0 \exp\ \left(i\ \left|A_0^2\right|\ \tau_1\ T_1\right)$.

При $T_1/q < 0$ слабонелинейная плоская волна неустойчива к продольной модуляции [4].

3. Результаты расчётов

Выполним расчёт средних течений, индуцируемых захваченной топографической волной на полигоне измерений в Норвежском море. Средний профиль частоты Брента-Вяйсяля показан на рис. 1.

Нетривиальные решения краевой задачи первого приближения (3) находим численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Величину квадрата горизонтального волнового вектора определяем методом пристрелки. В результате было получено дисперсионное соотношение (рис. 2), находилась функция u_{30}^{I} захваченной наклонным дном моды топографических волн при фиксированной частоте волны $\omega < f$.

Рис. 1

На рис. 3 показан профиль среднего течения, индуцируемого двадцати восьмичасовой захваченной топографической волной при амплитуде волны 5,7 см/с.

Отношение T_1/q в НУШ отрицательно, поэтому захваченные топографические волны модуляционно неустойчивы.

Рис. 2

Рис. 3

Список литературы

[1] Езерский А.Б., Папко В.В. Лабораторное исследование крупномасштабных потенциальных течений, индуцируемых пакетом поверхностных волн // Изв. АН СССР., Физика атмосферы и океана.— 1986.— Т.22, №9 — С.979-986.

[2] Grimshow R. The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion.// Stud. In Appl. Math.— 1977.— V.56.— P.241-266.

[3] Юэн Г., Лэйк Б. Теория нелинейных волн в приложении к волнам на глубокой воде // Солитоны в действии.— М.: Мир, 1981.— С. 108-131.

[4] Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане.— Л.: “Гидрометеоиздат”, 1981.— 49, 217 с.

[5] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.— 576 с.

Морской гидрофизический институт национальной академии наук Украины
ул. Капитанская, 2, 99002, Севастополь, Украина
E-mail: math@msusevastopol.net

Черноморский филиал МГУ им. М.В.Ломоносова
ул. Героев Севастополя, 7, 99001, Севастополь, Украина
E-mail: pvictoria@list.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.927.25 MSC2000: 34L10

В.С. Рыхлов

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ПРЯМОЙ [1]

1. Постановка задачи, предварительные сведения и результаты

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$
$$:= \Big(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda\alpha_{\nu 2} y(0)\Big) + \Big(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda\beta_{\nu 2} y(1)\Big) = 0, \quad \nu = 1,2, \tag{1}$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$.

В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид

$$\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0.$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ и предположим, что всюду в дальнейшем выполняется основное предположение:

корни ω_1, ω_2 отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала.

Не нарушая общности, можно считать:

1^0) $\omega_2 < 0 < \omega_1$.

Далее будет использоваться обозначение $\tau := |\omega_2|/\omega_1$. Ясно, что $\tau > 0$.

Обозначим $y_1(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. При $\lambda \neq 0$ эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$.

Далее для определенности считаем $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Обозначим $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j) U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda$ $(\nu, j = 1,2)$ и $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ $(j = 1,2)$. Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ U_2(y_1,\lambda) & U_2(y_2,\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} v_{11} + e^{\lambda\omega_1} w_{11} & v_{12} + e^{\lambda\omega_2} w_{12} \\ v_{21} + e^{\lambda\omega_1} w_{21} & v_{22} + e^{\lambda\omega_2} w_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2 \big(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} a_{12}\big) = \lambda^2 \Delta_0(\lambda).$$

Предположим, что всюду в дальнейшем выполняется условие

2^0) $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$.

При этом условии

$$\Delta_0(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}}, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003).

и, следовательно, рассматриваемый пучок $L(\lambda)$ не является регулярным [1, с. 66–67] и, более того, не является нормальным по терминологии работы [2].

Решается задача нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует двукратная полнота системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$. При отсутствии такой полноты естественно ставить вопрос о двукратной полноте в пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $0<\sigma<1$ или об однократной полноте в пространстве $L_2[0,1]$, или, хотя бы, в пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $0<\sigma<1$. При исследовании полноты системы с.п.ф. естественно возникает задача о минимальности этой системы в указанных пространствах и, более того, о безусловной базисности или, что почти одно и то же, о базисности Рисса.

Отметим, что в случае $0<\omega_1<\omega_2$ и при условии $a_{1\bar{2}}\neq 0$, $a_{\bar{1}2}\neq 0$, $a_{\bar{1}\bar{2}}=a_{12}=0$ свойства собственных функций (с.ф.) детально исследовались в [3], а при условии $\mathbf{2}^0$ в [4]. В случае же $\omega_2<0<\omega_1$, но при дополнительном условии $0<\omega_1<|\omega_2|$ и выполнении условия $\mathbf{2}^0$ двукратная полнота системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,\sigma]$ детально исследовалась в работе [5].

Из (2) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda)=0$ имеет счетное число корней, которые выражаются формулой
$$\lambda_k=(2k\pi i+d_0)/\omega_1,\qquad k\in\mathbb{Z},\tag{3}$$
где $d_0:=\ln_0 c_0$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $c_0:=-a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{1\bar{2}}$.

Обозначим $\Lambda:=\{\lambda_k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda\setminus\{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda=0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0\in\Lambda$. Имеет место равенство
$$e^{\lambda\omega_1}=c_0,\qquad \lambda\in\Lambda.\tag{4}$$

В качестве порождающей функции для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ возьмем порождающую функцию, предложенную в работе [6]:
$$\gamma(x,\lambda,\Gamma)=\begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda)\\ -\Gamma & V_1+e^{\lambda\omega_1}W_1 & V_2+e^{\lambda\omega_2}W_2\end{vmatrix},\qquad \lambda\neq 0,$$
где вектор $\Gamma=(\gamma_1,\gamma_2)^T\neq 0$ является параметром. В работе [6, Lemma 1, Lemma 2] исследовалась возможность брать в качестве Γ векторы V_j и W_j $(j=1,2)$.

Далее будут использоваться альтернативные условия:

$\mathbf{3}^0$**)** $W_2\neq 0$ или: $W_2=0$ и $a_{1\bar{1}}=0$;

$\mathbf{4}^0$**)** $W_2=0$ и $a_{1\bar{1}}\neq 0$.

Лемма 1. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$*–*$\mathbf{3}^0$*, то функция*
$$y(x,\lambda):=\exp(\lambda\omega_1 x)\tag{5}$$
является порождающей для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ *при* $\lambda\neq 0$.

Лемма 2. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$ *и* $\mathbf{4}^0$*, то функция*
$$y(x,\lambda):=\exp(\lambda\omega_1 x)+b_0\exp(\lambda(\omega_1+\omega_2 x)),\tag{6}$$
где $b_0=a_{1\bar{1}}/a_{\bar{1}\bar{2}}\neq 0$*, является порождающей для системы с.ф. пучка* $L(\lambda)$ *при* $\lambda\neq 0$.

Замечание 10. Легко устанавливается следующий факт: для того, чтобы краевые условия (1) были полураспадающимися в точке 0 (в точке 1), необходимо и достаточно, чтобы $a_{12}=0$ ($a_{\bar{1}\bar{2}}=0$). Так как выполняется условие $a_{12}=0$, то рассматриваемые краевые условия являются полураспадающимися в точке 0, то есть эквивалентны краевым условиям, одно из которых берется только в точке 0, а другое – смешанное (в 0 и в 1).

Замечание 11. Учитывая (4) в (6), можно установить, что при выполнении условий $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$ и $\mathbf{4}^0$ функция
$$\tilde{y}(x,\lambda):=\exp(\lambda\omega_1 x)+\tilde{b}_0\exp(\lambda\omega_2 x),$$
где $\tilde{b}_0=a_{\bar{1}1}/a_{1\bar{2}}\neq 0$, также является порождающей для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ при $\lambda\neq 0$.

Обозначим $Y = \{y(x,\lambda):\ \lambda\in\Lambda\}$. Если $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то система Y совпадает с системой с.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с.з. Если $\lambda = 0 \in \Lambda$, то в случае порождающей функции (5) система Y содержит функцию $y(x,0) = \mathbb{I}(x) \equiv 1$, которая может не быть с.ф. пучка $L(\lambda)$. В случае же порождающей функции (6) при $\lambda = 0 \in \Lambda$ ситуация сложнее. При $1+b_0 \neq 0$ функция $y(x,0) \equiv 1+b_0$ может не быть с.ф. пучка $L(\lambda)$, а в случае $1+b_0 = 0$ имеем $y(x,0) = \mathbb{O}(x) \equiv 0$ и система Y заведомо не является минимальной и базисом ни в каком пространтсве $L_2[0,\sigma]$, где $\sigma > 0$. Но с точки зрения полноты и неполноты с бесконечным дефектом системы Y и $Y\backslash\{\mathbb{O}\}$ эквивалентны.

Из леммы 1 получаем очевидный результат

Теорема 1. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$–$\mathbf{3}^0$, *то система* $Y = \{y(x,\lambda):\ \lambda\in\Lambda\}$, *где* $y(x,\lambda)$ *определяется формулой* (5), *однократно полна, минимальна и образует базис Рисса в пространстве* $L_2[0,1]$, *а относительно двукратной полноты имеет бесконечный дефект в любом пространстве* $L_2[0,\sigma]$, $\sigma > 0$.

В дальнейшем считаем, что выполняется условие $\mathbf{4}^0$. В этом случае порождающая функция имеет вид (6), где $b_0 \neq 0$.

2. Исследование двукратной полноты

Исследуем двукратную полноту системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$, $\sigma > 0$. Для скалярного произведения в пространстве $L_2^2[0,\sigma] := L_2[0,\sigma]\oplus L_2[0,\sigma]$ будет использоваться обозначение

$$\langle \hat g, \hat h\rangle_2 := \langle g_1, h_1\rangle + \langle g_2, h_2\rangle,$$

где $\hat g = (g_1, g_2)$, $\hat h = (h_1, h_2)$, $\langle g_j, h_j\rangle := \int_0^\sigma g_j(x)\overline{h_j(x)}\,dx$, $j = 1,2$.

Пусть $\hat y(x,\lambda) := (y(x,\lambda), \lambda y(x,\lambda))$, где $y(x,\lambda)$ определяется формулой (6), а $\hat f(x) := (\overline{f}_1, \overline{f}_2)$, где $f_1, f_2 \in L_2[0,\sigma]$. Справедлива следующая лемма

Лемма 3. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$ *и* $\mathbf{4}^0$, *то для всех* $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *имеет место соотношение*

$$\langle \hat y(\cdot,\lambda), \hat f\rangle_2 = \left(e^{\lambda\omega_1\sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2\sigma)}\right)\tilde f_1(\sigma) +$$
$$+\lambda\left(\int\limits_0^\sigma e^{\lambda\omega_1 x}F_1(x)\,dx + \int\limits_{1-\tau\sigma}^1 e^{\lambda\omega_1 x}\frac{1}{\tau}b_0 F_2\left(\frac{1-x}{\tau}\right)dx\right),$$

где $\tilde f_1(x) := \int_0^x f_1(\xi)\,d\xi$, $F_1(x) := f_2(x) - \omega_1\tilde f_1(x)$, $F_2(x) := f_2(x) - \omega_2\tilde f_1(x)$.

Из этой леммы вытекают следующие теоремы

Теорема 2. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $\sigma = \frac{1}{1+\tau}$, *то система* Y *двукратно полна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *с возможным дефектом, не превосходящим числа 1.*

Теорема 3. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $\sigma > \frac{1}{1+\tau}$, *то система* Y *двукратно неполна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *и имеет в этом пространстве бесконечный дефект относительно двукратной полноты.*

Следствие 1. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то система* Y *не является двукратно полной в пространстве* $L_2[0,1]$ *и имеет в этом пространстве бесконечный дефект относительно двукратной полноты.*

3. Критерии однократной полноты и минимальности

Обозначим дефектное подпространство системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$ через $\mathfrak{N}_\sigma$, то есть $\mathfrak{N}_\sigma := L_2[0,\sigma]\ominus\mathfrak{M}_\sigma$, где $\mathfrak{M}_\sigma$ есть замыкание линейной оболочки системы Y.

Чтобы охарактеризовать $\mathfrak{N}_\sigma$, рассмотрим операторы $A_\sigma \in L_2[0,\sigma] \to L_2[0,1]$, $B_\sigma \in L_2[0,\sigma] \to L_2[1-\sigma\tau,1]$ и $C_\rho \in L_2[1-\rho,1] \to L_2[0,1]$, определяемые формулами:

$$(A_\sigma f)(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j), & x \in [0,\sigma-l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j), & x \in (\sigma-l,1]; \end{cases} \tag{7}$$

$$(B_\sigma f)(x) := f\Big(\frac{1-x}{\tau}\Big), \quad x \in [1-\sigma\tau,1]; \tag{8}$$

$$(C_\rho f)(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f(x-j), & x \in [0,m+1-\rho]; \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f(x-j), & x \in (m+1-\rho,1]; \end{cases} \tag{9}$$

где $l,m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и удовлетворяют неравенствам $l<\sigma\le l+1$, $m<\rho\le m+1$.

Лемма 4. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то справедливо следующее равенство:* $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\sigma^0$, *где*

$$\mathfrak{N}_\sigma^0 := \{f \in L_2[0,\sigma]:\ A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} C_{\sigma\tau} B_\sigma f = 0\}.$$

Из данной леммы вытекает

Теорема 4. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то система* Y *полна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *тогда и только тогда, когда уравнение*

$$A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} C_{\sigma\tau} B_\sigma f = 0 \tag{10}$$

имеет только тривиальное решение в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Что касается минимальности, то имеет место

Теорема 5. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то система* Y *минимальна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *тогда и только тогда, когда неоднородное уравнение*

$$A_\sigma z + \frac{\bar{b}_0}{\tau} C_{\sigma\tau} B_\sigma z = g_n, \tag{11}$$

где $g_n(x) := \exp((2n\pi i - \bar{d}_0)x)$, *для каждого* $n \in \mathbb{Z}$ *имеет хотя бы одно решение* $z_n(x)$ *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$. *При этом система* $Z := \{z_n(x):\ n \in \mathbb{Z}\}$ *будет биортогональной к системе* Y *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$.

Рассмотрим в $L_2[0,\sigma]$ уравнение

$$A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} C_{\sigma\tau} B_\sigma f = g, \tag{12}$$

где $g \in L_2[0,1]$ есть заданная функция. Уравнения (10) и (11) есть частные случаи этого уравнения. Из теорем 4 и 5 видно, что уравнение (12) является основным при исследовании полноты и минимальности системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$. Из формул (7)–(9) непосредственно вытекает

Лемма 5. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $l,m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *таковы, что* $l<\sigma\le l+1$, $m<\sigma\tau\le m+1$, *то уравнение* (12) *имеет вид:*

1) *при* $\sigma - l \le m+1-\sigma\tau$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big) = g(x), & x \in [0,\sigma-l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0{}^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big) = g(x), & x \in (\sigma-l,m+1-\sigma\tau]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big) = g(x), & x \in (m+1-\sigma\tau,1]; \end{cases} \tag{13}$$

2) *при* $m+1-\sigma\tau<\sigma-l$

$$\left\{\begin{array}{ll}\sum\limits_{j=0}^{l}\bar c_0^{j}f(x+j)+\frac{\bar b_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{1}{\bar c_0^{j}}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big)=g(x), & x\in[0,m+1-\sigma\tau];\\ \sum\limits_{j=0}^{l}\bar c_0{}^{j}f(x+j)+\frac{\bar b_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{1}{\bar c_0^{j}}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big)=g(x), & x\in(m+1-\sigma\tau,\sigma-l];\\ \sum\limits_{j=0}^{l-1}\bar c_0^{j}f(x+j)+\frac{\bar b_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{1}{\bar c_0^{j}}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big)=g(x), & x\in(\sigma-l,1].\end{array}\right. \tag{14}$$

4. Достаточные условия однократной полноты, неполноты и минимальности

Справедливы следующие достаточные условия однократной полноты и неполноты системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$, которые получаются на основании теоремы 4 и формул (13)–(14) для уравнения (10), в которых $g(x)\equiv 0$.

Теорема 6. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то для однократной полноты системы* Y *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *достаточно выполнения одного из условий:*

а) $0<\sigma\le\min\{1,\frac{1}{\tau}\}$, $0<\tau<+\infty$*; при* $\tau=1$ *должно быть* $b_0\ne\pm1$*;*

б) $|b_0|^2<\tau$ *в случае* $\frac{1}{\tau}<\sigma\le\frac{2}{1+\tau}$, $\tau>1$*;*

в) $|b_0|^2\sum\limits_{s=0}^{k}\frac{1}{|c_0|^{2s}}<\tau$ *в случае, если при некотором натуральном* k *выполняются неравенства* $\frac{k+1}{1+\tau}<\sigma\le\min\Big\{1,\frac{k+2}{1+\tau}\Big\}$, $\tau>k$.

Теорема 7. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то для того, чтобы система* Y *была однократно не полна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$, *где* $\sigma>\frac{1}{\tau}$, $\tau>1$ *и имела там бесконечный дефект, достаточно выполнения условия*

$$\tau<|b_0|^2. \tag{15}$$

Что же касается однократной минимальности системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$, то из теоремы 5 и формул (13)–(14) для уравнения (11), в которых $g(x)\equiv g_n(x)$, получаются следующие достаточные условия

Теорема 8. *Пусть выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $\sigma\ge\sigma_0:=\frac{1}{\tau}$, *где* $\tau\ge1$. *Тогда для однократной минимальности системы* Y *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *достаточно:*

а) в случае $\tau>1$ *— выполнения условия* (15)*; при этом функции биортогональной системы* $Z=\{z_n(x):\ n\in\mathbb{Z}\}$ *определяются при* $\sigma=\sigma_0$ *единственным образом формулой:*

$$z_n(x)=z_n^0(x):=\Big((E-Q_\tau)^{-1}g_n^0\Big)(x),\qquad x\in[0,\sigma_0], \tag{16}$$

где оператор $Q_\tau\in L_2[0,\sigma_0]\to L_2[0,\sigma_0]$ *определяется формулой:*

$$(Q_\tau f)(x)=\left\{\begin{array}{ll}-\frac{\tau}{b_0}f(1-\tau x), & x\in\Big[\frac{\tau-1}{\tau^2},\frac{1}{\tau}\Big];\\ 0, & x\in\Big(0,\frac{\tau-1}{\tau^2}\Big];\end{array}\right.$$

а $g_n^0(x):=\frac{\tau}{b_0}g_n(1-\tau x)$, $x\in[0,\sigma_0]$*;*

б) в случае $\tau=1$ *— выполнения условия* $b_0\ne\pm1$*; в этом случае функции биортогональной системы* $Z=\{z_n(x)\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$ *определяются при* $\sigma=\sigma_0=1$ *единственным образом формулой:*

$$z_n(x)=z_n^0(x):=\frac{1}{1-\bar b_0^2}\Big(g_n(x)-\bar b_0g_n(1-x)\Big),\quad x\in[0,1]. \tag{17}$$

5. Достаточные условия однократной базисности Рисса

Оказывается, можно получить более сильный результат о свойствах системы Y, а именно: доказать однократную базисность Рисса этой системы при некоторых значениях параметров пучка $L(\lambda)$. Из теорем 6 и 8, формул (16) и (17) получаются следующие достаточные условия однократной базисности Рисса системы Y

Теорема 9. *Пусть выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $\sigma = \sigma_0 (= \frac{1}{\tau})$. *Тогда для того, чтобы система* Y *образовывала однократный базис Рисса в пространстве* $L_2[0, \sigma_0]$, *достаточно:*

а) в случае $\tau > 1$ *— выполнения условия* (15);

б) в случае $\tau = 1$ *— выполнения условия* $b_0 \neq \pm 1$.

Список литературы

[1] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы* // М.: Наука. – 1969. – 528 с.

[2] Шкаликов А. А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г.Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1983. – № 9. – С. 190–229.

[3] Рыхлов В. С. *О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – Том 36. – № 3. – С. 35–44.

[4] Рыхлов В. С. *О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка* // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. — М.: Научно-исследовательская группа международного журнала "Integral Transforms and Special Functions"и ВЦ РАН. – 2001. – Том 2. – № 1. – С. 85–103.

[5] Рыхлов В. С. *О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов* // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 11. – Simferopol, 2001. – P. 86–93.

[6] Rykhlov V. S. *On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators* // Spectral and Evolutionary Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 7. – Simferopol, 1997. – P. 70–73.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
ул. Астраханская 83, 410012, Саратов, Россия
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.972.5 MSC2000: 65L60

В.В. Смагин

О ТЕОРЕМЕ ТИПА ОБЭНА-НИТШЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ [1]

В работе прослеживается связь оценок погрешностей приближенных решений, найденных по методу Галеркина в стационарных (эллиптических) задачах, с оценками погрешностей в нестационарных (параболических) задачах.

Пусть V и H – гильбертовы пространства, причем $V \subset H$ и вложение плотное и непрерывное. Обозначим через V' пространство, двойственное V. Отождествляя пространство H со своим двойственным пространством, получим вложения $V \subset H \subset V'$, где вложение $H \subset V'$ также плотное и непрерывное [1].

Предположим, что на $u, v \in V$ задана симметричная билинейная форма $a(u,v)$ такая, что для всех $u, v \in V$ выполняется:

$$|a(u,v)| \le M\|u\|_V \|v\|_V \ , \quad a(u,u) \ge \delta \|u\|_V^2 \ \ (\delta > 0). \tag{1}$$

Рассмотрим стационарную (эллиптическую) задачу: для заданного элемента $f \in V'$ найти элемент $u \in V$ такой, что для всех $v \in V$ выполняется

$$a(u,v) = (f,v) \ , \tag{2}$$

где под выражением (f,v) понимается значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$. В частности, если $f \in H$, то выражение (f,v) совпадает со скалярным произведением в пространстве H. Воспользовавшись, например, теоремой Лакса-Мильграмма [1] получим, что задача (2) имеет для любого $f \in V'$ единственное решение.

Обратим внимание, что форма $a(u,v)$ порождает оператор $A \in L(V, V')$ такой, что для всех $u, v \in V$ выполняется $a(u,v) = (Au, v)$. Следовательно, задачу (2) можно записать в эквивалентном виде $Au = f$. При этом решение $u = A^{-1}f$, где $A^{-1} \in L(V', V)$.

Задачу (2) решаем приближенно методом Галеркина. Пусть V_h – конечномерное подпространство пространства V. Здесь h – положительный параметр. Приближенная задача для задачи (2) имеет следующий вид: по заданному элементу $f \in V'$ найти элемент $u_h \in V_h$ такой, что для всех $v_h \in V_h$ выполняется

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \ . \tag{3}$$

Очевидно, что задача (3), как и задача (2), имеет в V_h единственное решение $u_h \in V_h$, которое называется приближенным решением задачи (2), найденным по методу Галеркина. Заметим, что задача (3) сводится к линейной алгебраической системе уравнений.

Установим оценки погрешностей приближенных решений задачи (2).

Выражение $a(u,v)$ определяет на V новое скалярное произведение. Получим гильбертово пространство $V(a) = \{u, v \in V \,|\, (u,v)_{V(a)} = a(u,v)\}$. Из (1) следует эквивалентность норм пространств V и $V(a)$, то есть для $v \in V$ выполняются оценки

$$\delta^{-1/2}\|v\|_V \le \|v\|_{V(a)} \le M^{1/2}\|v\|_V \ . \tag{4}$$

Легко видеть, что для всех элементов $u \in V$ и $v_h \in V_h$ справедливо равенство $a(u, v_h) = a(Q_h(a)u, v_h)$, где $Q_h(a)$ – ортопроектор пространства $V(a)$ на V_h. Отсюда следует, что решения u и u_h задач (2) и (3) соответственно связаны соотношением $u_h = Q_h(a)u$.

Отметим также, что оператор A, порожденный формой $a(u,v)$, как оператор в пространстве H с областью определения $D(A) = \{v \in V \,|\, Av \in H\}$, является самосопряженным и положительно определенным. Кроме того, [2] для самосопряженного

[1] Работа выполнена при содействии РФФИ, проект № 07-01-00131.

положительно определенного оператора $A^{1/2}$ область определения $D(A^{1/2}) = V$ и $\|v\|_{V(a)} = \|A^{1/2}v\|_H$.

Теорема 1. *Пусть u и u_h решения задач (2) и (3) соответственно. Тогда справедливы оценки погрешности:*

$$\|u-u_h\|_V \le \delta^{-1/2}M^{1/2}\|(I-Q_h)u\|_V, \tag{5}$$

$$\|u-u_h\|_H \le M\|(I-Q_h)A^{-1}\|_{H\to V}\|(I-Q_h)u\|_V, \tag{6}$$

где Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h.

Доказательство. Оценка (5) следует из (4) и свойств ортопроекторов.

$$\|u-u_h\|_V = \|[I-Q_h(a)]u\|_V \le \delta^{-1/2}\|[I-Q_h(a)]u\|_{V(a)} =$$

$$\delta^{-1/2}\min_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_{V(a)} \le \delta^{-1/2}M^{1/2}\min_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V = \delta^{-1/2}M^{1/2}\|(I-Q_h)u\|_V\,.$$

Переходим к оценке (6). Заметим, что

$$\|u-u_h\|_H = \|[I-Q_h(a)]u\|_H \le \|[I-Q_h(a)]A^{-1/2}\|_{H\to H}\,\|A^{1/2}[I-Q_h(a)]u\|_H\,. \tag{7}$$

Для произвольных $\varphi,\ \psi\in H$ рассмотрим равенство

$$([I-Q_h(a)]A^{-1/2}\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ A^{1/2}[I-Q_h(a)]A^{-1}\psi)\,,$$

оценивая которое, получим

$$|([I-Q_h(a)]A^{-1/2}\varphi,\ \psi)| \le \|\varphi\|_H\,\|[I-Q_h(a)]A^{-1}\psi\|_{V(a)} \le$$

$$\|\varphi\|_H\,M^{1/2}\|(I-Q_h)A^{-1}\psi\|_V \le \|\varphi\|_H\,M^{1/2}\|(I-Q_h)A^{-1}\|_{H\to V}\|\psi\|_H\,.$$

Отсюда следует оценка

$$\|[I-Q_h(a)]A^{-1/2}\|_{H\to H} \le M^{1/2}\|(I-Q_h)A^{-1}\|_{H\to V}\,.$$

Осталось в (7) воспользоваться оценкой (5). □

Обратим внимание, что оценка (5) является аналогом оценки погрешности приближенного решения в методе Ритца, а оценка (6) – абстрактный аналог теоремы Обэна-Нитше [1].

Покажем, что из оценок (5) и (6) следует сходимость приближенных решений к точному, а также может быть получена и скорость этой сходимости.

Пусть задана последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$, предельно плотная в пространстве V, то есть для всякого $v\in V$ при $h\to 0$ выполняется $\|(I-Q_h)v\|_V\to 0$. Тогда при $h\to 0$ из (5) и (6) следует сходимость $u_h\to u$ как в норме пространства V, так и в норме пространства H. Кроме того, оценка (6) позволяет показать, что в пространстве H сходимость на порядок быстрее, чем в пространстве V.

Для характеристики скорости сходимости предположим, что существует гильбертово пространство E такое, что $D(A)\subset E\subset V$ и пространство V совпадает (с точностью до эквивалентной нормы) с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ (см. [3]).

Например, если оператор A порожден в области $\Omega\subset R^n$ с гладкой границей эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V' = W_2^{-1}(\Omega)$ и $E = W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задано условие Неймана, то полагаем $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega)$.

Предположим также, что подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством, типичным для подпространств типа конечных элементов:

$$\|(I-Q_h)v\|_V \le c_1h\|v\|_E \qquad (v\in E)\,, \tag{8}$$

где константа c_1 не зависит от h и v.

Из (5) и (8) получим для решения u задачи (2) в случае $u\in E$ оценку

$$\|u-u_h\|_V \le c_2h\|u\|_E. \tag{9}$$

Если же оператор A удовлетворяет дополнительному условию, естественному для эллиптических операторов,

$$\|v\|_E \le \alpha\,\|Av\|_H \qquad (\alpha > 0,\ \ v \in D(A))\,, \tag{10}$$

то из (6) следует оценка

$$\|u - u_h\|_H \le c_3 h^2 \|u\|_E\,, \tag{11}$$

то есть сходимость приближенных решений к точному в норме H происходит на порядок быстрее, чем в норме V.

Перейдем к рассмотрению параболических задач. Пусть задан элемент $u_0 \in H$ и на $[0,\,T]$ функция $f(t)$ со значениями в V'. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(t)$, определенную почти всюду на $[0,\,T]$, такую, что для всех $v \in V$ почти всюду на $[0,\,T]$

$$(u'(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \text{и} \quad u(0) = u_o. \tag{12}$$

Приведем утверждение [3] о слабой разрешимости задачи (12).

Теорема 2. *Пусть элемент $u_0 \in H$ и функция $f \in L_2(0,T;V')$. Тогда задача (12) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in L_2(0,T;V') \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$.*

Можно показать [4], что для случая более гладких элемента u_0 и функции $f(t)$ решение $u(t)$ задачи (12) будет более гладким. Например, если $u_0 \in V$ и $f \in L_2(0,T;H)$, то решение $u \in L_2(0,T;E)$.

Решаем задачу (12) приближенно методом Галеркина. Требуется найти функцию $u_h(t)$, определенную почти всюду на $[0,\,T]$, со значениями в V_h – конечномерном подпространстве пространства V такую, что для всех $v_h \in V_h$ почти всюду на $[0,\,T]$

$$(u_h'(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h) \quad \text{и} \quad u_h(0) = u_o^h \in V_h\,, \tag{13}$$

где элемент $u_o^h \in V_h$ считается заданным.

Учитывая оценки (5) и (6), где $u_h = Q_h(a)u$, а u – произвольный элемент из V, можно показать [5], что в предположениях на проекционные подпространства (8) справедлива следующая оценка погрешности:

$$\Big(\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2\,dt\Big)^{1/2} \le M\Big\{\|Q_h u^0 - u_h^0\|_H +$$

$$h\Big[\,\|u^0\|_V + \Big(\int_0^T \|f(t)\|_H^2\,dt\Big)^{1/2}\Big]\Big\}.$$

Здесь $u(t)$ и $u_h(t)$ – решения задач (12) и (13) соответственно.

В более слабой по пространству норме оценка погрешности следующая [6]:

$$\Big(\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2\,dt\Big)^{1/2} \le M\Big\{\|P_h u^0 - u_h^0\|_{V'} + h^2\Big(\int_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt\Big)^{1/2}\Big\}.$$

Здесь P_h – ортопроектор пространства H на V_h.

Как видно, установлена полная аналогия с оценками погрешностей (9) и (11) приближенных решений стационарных задач.

В других, более сильных по времени нормах, положение несколько сложнее. Например, пусть решение $u(t)$ задачи (12) такое, что $u \in C([0,T],E)$ и $u' \in L_2(0,T;V)$. Тогда [5] в норме пространства $C([0,T],V)$ справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t) - u_h(t)\|_V \le M\Big\{\|Q_h u^0 - u_h^0\|_H +$$

$$h\Big[\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_E + \Big(\int_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)^{1/2}\Big]\Big\}.$$

В более слабой по пространству норме оценка погрешности следующая [5]:

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t) - u_h(t)\|_H \le M\Big\{\|Q_h u^0 - u_h^0\|_H +$$

$$h^{3/2}\left[\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_E+\Big(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)^{1/2}\right]\Big\}.$$

Отметим, что указанные оценки погрешности приближенных решений линейных параболических задач справедливы и для задач (12) более общего вида. Так в (12) билинейная форма может гладко зависеть от $t\in[0,T]$, то есть иметь вид $a(t,u,v)$. Кроме того, уравнение (12) может содержать слагаемые с операторами, подчиненными оператору $A(t)$.

Обратим также внимание на то, что для приближенного решения задачи (13) можно использовать проекционно-разностные методы, которые являются методами полной дискретизации. При этом дискретизация по пространству проводится методом Галеркина, а по времени дискретизация проводится, например, неявным методом Эйлера или используется разностная схема Кранка-Николсон. Оказывается, что оценки погрешностей проекционно-разностных методов по пространственным переменным подобны оценкам, приведенным выше, для полудискретного метода Галеркина (напр. [6, 7, 8, 9, 10]).

Список литературы

[1] Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.

[2] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.

[3] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 372 с.

[4] Смагин В.В. *Обобщенная разрешимость вариационных задач параболического типа* // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. – 2001. – № 6. – С. 131 – 139.

[5] Смагин В.В. *Оценки погрешности полудискретных приближений по Галеркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана* // Известия вузов. Математика. – 1996. – № 3(406). – С. 50 – 57.

[6] Смагин В.В. *Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений* // Математ. сборник. – 1997. – Т. 188, № 3. – С. 143 – 160.

[7] Смагин В.В. *Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений* // Журн. вычислит. математ. и математ. физики. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 908 – 919.

[8] Смагин В.В. *Энергетические оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон для параболических уравнений* // Сибирский матем. ж. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 670 – 682.

[9] Смагин В.В. *Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений с модифицированной схемой Кранка-Николсон* // Математ. заметки. – 2003. – Т. 74, № 6. – С. 913 – 923.

[10] Смагин В.В. *О скорости сходимости проекционно-разностных методов для гладко разрешимых параболических уравнений* // Математ. заметки. – 2005. – Т. 78, № 6. – С. 907 – 918.

Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, 394000, Воронеж, Россия
E-mail: smagin@math.vsu.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 519.246 MSC2000: 37H10

Т.И. Смагина

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Математической моделью ряда задач, возникающих на практике, служат уравнения со случайными коэффициентами. При этом решение является случайным процессом и представляет интерес изучение математического ожидания этого процесса, в частности, выявление его зависимости от законов распределения недетерминированных параметров задачи.

1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим стохастические колебания динамической системы с одной степенью свободы, математической моделью которых служит задача Коши

$$\ddot{x} + \varepsilon^2(t)x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1. \tag{1}$$

Здесь x_0, x_1 – скалярные случайные величины, $\varepsilon(t)$, $f(t)$ – случайные процессы с выборочными функциями из функционального пространства $F = L_p(0,T)$, где $1 < p < \infty$. Случайные величины x_0 и x_1, так же как $\varepsilon(t)$ и $f(t)$, могут быть зависимы между собой.

Предполагается, что $\varepsilon(t)$ и $f(t)$ заданы характеристическим функционалом

$$\varphi(v,u) = M\Big[\exp\Big\{i\int\limits_0^T [\varepsilon(s)v(s) + f(s)u(s)]\,ds\Big\}\Big]. \tag{2}$$

Через $M[g(t)]$ обозначено математическое ожидание, вычисленное по функции распределения случайного процесса $g(t)$. В (2) функции v и u принадлежат пространству $F^* = L_q(0,T)$, где $1/p + 1/q = 1$.

Далее всюду предполагается, что случайные величины x_0, x_1 независимы со случайными процессами $\varepsilon(t)$ и $f(t)$, в том смысле, что

$$M[x_i\varepsilon(t)] = M[x_i]M[\varepsilon(t)], \quad M[x_i f(t)] = M[x_i]M[f(t)], \quad (i = 0,1).$$

Обозначим через $\mathbb{R}$ вещественную прямую, $\mathbb{C}$ – комплексную плоскость, X – банахово пространство функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|\cdot\|$. Пусть задан функционал $y : X \to \mathbb{C}$ и его приращение $\Delta y(x,h) = y(x+h) - y(x)$ для любого $h \in X$ представимо в виде

$$\Delta y(x,h) = \int\limits_0^T \psi(x(t),t)h(t)\,dt + \omega(x,h),$$

где функция $\psi : X \times [0,T] \to \mathbb{C}$ такая, что $\int_0^T \psi(x(t),t)h(t)\,dt$ является линейным ограниченным по h функционалом на X, а

$$|\omega(x,h))|/\|h\| \to 0 \qquad \text{при} \quad \|h\| \to 0.$$

Тогда $\psi(x(t),t)$ называют вариационной производной функционала y в точке x и обозначают $\psi(x(t),t) = \delta y(x(t))/\delta x(t)$.

Аналогично определяется вариационная производная второго порядка как ядро второго дифференциала Фреше, если он представим в интегральном виде.

2. Сведение стохастической задачи к детерминированной

Введём в рассмотрение вспомогательный функционал

$$y(t,v,u) = M\Big[x(t)\exp\Big\{i\int_0^T [\varepsilon(s)v(s) + f(s)u(s)]\,ds\Big\}\Big].$$

Очевидно, что $y(t,0,0) = M[x(t)]$. Умножая обе части равенств (1) на

$$\exp\Big\{i\int_0^T [\varepsilon(s)v(s) + f(s)u(s)]\,ds\Big\}$$

и беря математическое ожидание от обеих частей, получим, что y является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y(t,v,u)}{\partial t^2} - \dfrac{\delta^2 y(t,v,u)}{\delta v^2(t)} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\delta\varphi(t,v,u)}{\delta u(t)}, \\ y(0,v,u) = M[x_0]\varphi(v,u), \\ y'_t(0,v,u) = M[x_1]\varphi(v,u). \end{cases}$$

Отметим, что независимость x_0, x_1 с $\varepsilon(t)$ и $f(t)$ позволила разделить математические ожидания в начальных условиях.

Так как нас интересует значение функционала $y(t,v,u)$ при $v = u = 0$, то, положив в последней системе $u = 0$ и обозначив для простоты записи $y(t,v,0) = y(t,v)$, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y(t,v)}{\partial t^2} - \dfrac{\delta^2 y(t,v)}{\delta v^2(t)} = g(t,v), \\ y(0,v) = M[x_0]\varphi_\varepsilon(v), \\ y'_t(0,v) = M[x_1]\varphi_\varepsilon(v), \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_\varepsilon(v) = M\Big[\exp\Big\{i\int_0^T \varepsilon(s)v(s)\,ds\Big\}\Big]$ - характеристический функционал случайного процесса $\varepsilon(t)$, а $g(t,v) = M\Big[f(t)\exp\Big\{i\int_0^T \varepsilon(s)v(s)\,ds\Big\}\Big]$. Если случайные процессы $\varepsilon(t)$ и $f(t)$ независимы, то, как нетрудно видеть, $g(t,v(t)) = M[f(t)]\varphi_\varepsilon(v(t))$.

Отметим, что система (3) является детерминированной. Однако сложность ее состоит в том, что, помимо частных производных, она содержат еще и вариационную производную второго порядка $\dfrac{\delta^2 y(t,v)}{\delta v^2(t)}$. Задачу (3) можно решать приближенно, например, методом конечных разностей (см. [1]).

Если же $\varepsilon(t) = \varepsilon$, то удается получить точную формулу для математического ожидания $M[x(t)]$ решения задачи. В этом случае (3) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y(t,v)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 y(t,v)}{\partial v^2} = M[f(t)\exp(i\varepsilon v)], \\ y(0,v) = M[x_0]\varphi_\varepsilon(v), \\ y'_t(0,v) = M[x_1]\varphi_\varepsilon(v). \end{cases} \tag{4}$$

Решение задачи (4) легко выписывается по формуле Даламбера и, учитывая, что $M[x(t)] = y(t,0)$, получаем

$$M[x(t)] = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{-t+\tau}^{t-\tau} M[f(\tau)\exp(i\varepsilon\xi)]\,d\xi\,d\tau +$$

$$\frac{M[x_1]}{2}\int_{-t}^{t} \varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi + \frac{M[x_0]}{2}[\varphi_\epsilon(-t) + \varphi_\varepsilon(t)]. \tag{5}$$

Формула (5) является достаточно общей, т.к. она верна для любых законов распределения случайных параметров задачи. Отметим, что для вывода формулы (5) требовалось знание функционала $\varphi(v,u)$, однако, в конечной формуле он не участвует. При независимых ε и $f(t)$ математическое ожидание решения полностью определяется характеристической функцией случайной величины ε и математическими ожиданиями параметров x_0, x_1 и $f(t)$.

3. Математическое ожидание решения в частных случаях

Если процесс $f(t)$ является стационарным, то есть $M[f(t)] = M[f]$, и независим с ε, то

$$M[x(t)] = \frac{M[f]\,t + M[x_1]}{2} \int\limits_0^t \psi_\varepsilon(s)\,ds - \frac{M[f]}{2} \int\limits_0^t s\psi_\varepsilon(s)\,ds + \frac{M[x_0]}{2}\psi_\varepsilon(t). \qquad (6)$$

Здесь $\psi_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(t) + \varphi_\varepsilon(-t)$.

Из (6) видно, что процесс $x(t)$ оказывается нестационарным даже при стационарном случайном внешнем воздействии и $M[x_0] = M[x_1] = 0$. Исследование формулы (6) показывает, что характер случайного изменения параметра ε существенно влияет на поведение среднего значения решения.

Для расчётов удобнее пользоваться формулами, в которые подставлен конкретный вид функции φ_ε и произведены некоторые упрощения. Например, для случайной величины ε, независимой с f и распределенной по нормальному закону со средним значением $\overline{\varepsilon}$ и дисперсией σ^2

$$M[x(t)] = (M[f]\,t + M[x_1]\,) \int\limits_0^t \exp\left(-\sigma^2 t^2/2\right) \cos \overline{\varepsilon} t\,dt +$$

$$M[f]\,\overline{\varepsilon}\sigma^{-2} \int\limits_0^t \exp\left(-\sigma^2 t^2/2\right) \sin \overline{\varepsilon} t\,dt - M[f]\,\sigma^{-2} + (M[x_0] + M[f]\,\sigma^{-2}) \exp\left(-\sigma^2 t^2/2\right) \cos \overline{\varepsilon} t.$$

Если ε подчиняется закону Пуассона со средним значением $\overline{\varepsilon}$, то

$$M[x(t)] = (M[f]\,t + M[x_1]) \exp\left(-\overline{\varepsilon}\right) \int\limits_0^t \exp\left(\overline{\varepsilon} \cos s\right) \cos(\overline{\varepsilon} \sin s)\,ds +$$

$$M[f]\,\exp\left(-\overline{\varepsilon}\right) \int\limits_0^t s \exp\left(\overline{\varepsilon} \cos s\right) \cos\left(\overline{\varepsilon} \sin s\right) ds + M[x_0] \exp\left[\overline{\varepsilon}(\cos t - 1)\right] \cos\left(\overline{\varepsilon} \sin t\right).$$

Если ε распределена по экспоненциальному закону со средним значением $\overline{\varepsilon}$, то

$$Mx(t) = (M[f]\,t + M[x_1]\,) arctg(\overline{\varepsilon} t)/\overline{\varepsilon} - M[f]\,ln(1 + \overline{\varepsilon}^2 t^2)/(2\overline{\varepsilon}^2) + M[x_0]\,/(1 + \overline{\varepsilon}^2 t^2).$$

Если ε подчиняется закону равномерного распределения со средним значением $M[\varepsilon] = 1/(a+b)$, то

$$M[x(t)] = \frac{M[f]\,t + M[x_1]}{b-a} \int\limits_0^t \frac{\sin(b-a)t}{t}\,dt +$$

$$\frac{M[f]}{b(b-a)}(\cos bt - 1) - \frac{M[f]}{a(b-a)}(\cos at - 1) + \frac{M[x_0]}{b-a}\,t \sin(b-a)t.$$

Отметим также, что предложенная методика пригодна и для нахождения моментных функций более высокого порядка, нежели первая.

Список литературы

[1] Задорожний *В.Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными.* – Воронеж, 2000. – 368 с.

Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, 394000, Воронеж, Россия
E-mail: `smagin@math.vsu.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 511.41: 511.528: 511.55 MSC2000: 11A55: 11D09

Д.В. Третьяков

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПЕЛЛЯ

Введение

Пусть $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ – целочисленная квадратичная форма. Целочисленные формы fи g называются эквивалентными, если существует такая унимодулярная подстановка

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \gamma x' + \delta y' \ , \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \end{cases}$$

что $f(x,y) = g(x',y')$. Эквивалентность квадратичных форм является отношением эквивалентности. Поскольку эквивалентные квадратичные формы имеют одинаковые множества значений, то в каждом классе эквивалентности можно выбрать простейшее уравнение.

Одним из таких простейших уравнений является уравнение Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$, где D – неквадратное число. Все положительные решения уравнения Пелля, как известно, получаются из разложения в цепную дробь (ЦД)

$$\sqrt{D} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \ldots, , q_2, q_1, 2q_0}] \ , \tag{1}$$

период которой содержит симметричную часть. Пара $\langle P_{kn-1}, Q_{kn-1} \rangle$, где $n \in \mathbb{N}$, $k-$период ЦД (1), является положительным решением уравнения Пелля тогда и только тогда, когда $kn-$нечётное [1], [2].

Отметим, что известные до сих пор обобщения этого уравнения (см., напр., [3]-[7]) получались за счёт усложнения самого уравнения. В настоящей работе предложено обобщение указанного уравнения, идущее от усложнения разложения в ЦД (1), которое, как известно, имеет место и для более общих квадратичных иррациональностей (КИ) вида $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$, где $D > a^2$, $a \in \mathbb{N}$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим КИ $\alpha = \dfrac{\sqrt{D} - b}{a}$, которые раскладываются в ЦД вида $[\ q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, sq_0}\ ]$, где $s \geq 2$ – натуральное число. Такие КИ в дальнейшем будем называть $s-$*дискриминантами.* В связи с этим возникает задача описания всех $s-$дискриминантов. Если эта задача решена, то структура разложения $s-$дискриминанта в ЦД позволяет записать обобщение уравнения Пелля (в работе - $s-$*уравнение Пелля*), естественным образом здесь возникающего. Следовательно, приходим к задаче исследования на разрешимость и описания всех решений $s-$уравнения Пелля.

Анализ последних публикаций в области диофантовых уравнений 2-го порядка (см., напр., [3]-[7])позволяет сделать вывод, что $s-$дискриминанты и вопросы, связанные с этим понятием, не исследовались.

Все определения и понятия, используемые ниже без пояснений, хорошо известны. При необходимости их можно найти в литературе [1] - [3].

2. Исследование

1. $s-$дискриминанты. Пусть $D-$ натуральное число, не являющееся точным квадратом. Имет место следующая

Теорема 1. *Равенство*

$$\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a} = [\ q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, sq_0}\ ], \tag{2}$$

где $s \geq 2-$ натуральный параметр, возможно тогда и только тогда, когда

$$2b = (s-2)q_0 a, \quad q_0 = [\alpha] > 1. \tag{3}$$

Если это условие выполнено, то

$$b = (s-2)q_0 P_{n-1},\ a = 2P_{n-1},\ D = (sq_0 P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n, \tag{4}$$

где

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [\ q_1, q_2, ..., q_2, q_1\ ]. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \dfrac{\sqrt{D}-b}{a} = [\ q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, sq_0}\ ]$, $\alpha' = -\dfrac{\sqrt{D}+b}{a}$ - сопряжённая КИ. Тогда в силу 2-й теоремы Галуа

$$\alpha + (s-1)q_0 = [\ \overline{sq_0, q_1, ..., q_1}\ ] = -\ \alpha' + q_0,$$

откуда и следует условие (3).

Обратно, если выполнено условие (3), то $\omega = \alpha + (s-1)q_0 > 1$ и

$$-\ \omega\ ' = \frac{(\sqrt{D}-b) + 2b - (s-1)q_0 a}{a} = \alpha - q_0 \in (0,1).$$

Следовательно, по 1-й теореме Галуа число ω раскладывается в чистую периодическую дробь вида $[\ \overline{sq_0,\ q_1, ...,\ q_n}\ ]$. Так как по 2-й теореме Галуа

$$-\ (\omega\ ')^{-1} = [\ \overline{q_n, q_{n-1}, ..., q_1, sq_0}\ ] = (\alpha - q_0)^{-1} = [\ \overline{q_1, q_2, ..., q_{n-1}, q_n, sq_0}\ ],$$

то из единственности разложения в ЦД следуют равенства : $q_n = q_1,\ q_{n-1} = q_2,\ ...$.

Поскольку

$$(\omega - sq_0)^{-1} = [\ \overline{q_1, ..., q_1,\ sq_0}\ ] = [\ q_1, ..., q_1,\ \omega\ ] = \frac{\omega P_{n-1} + P_{n-2}}{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}},$$

то

$$\omega - sq_0 = \frac{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}}{\omega P_{n-1} + P_{n-2}}, \quad \omega^2 P_{n-1} - \omega s q_0 P_{n-1} - (sq_0 P_{n-2} + Q_{n-2}) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = s^2 q_0^2 P_{n-1}^2 + 4P_{n-1}(sq_0 P_{n-2} + Q_{n-2}) = (sq_0 P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n.$$

Отсюда

$$\alpha = \omega - (s-1)q_0 = \frac{\sqrt{D} - (s-2)q_0 P_{n-1}}{2P_{n-1}}\ .$$

Теорема доказана. □

КИ, представимые формулой (2), будем называть *$s-$дискриминантами.* Например, $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$, где $D > a^2\ -$ 2-дискриминант.

Пример 1. КИ $\alpha = \frac{\sqrt{485}-5}{10}$ раскладывается в ЦД $[\ 1, \overline{1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3}\ ]$, ($s = 3$, $q_0 = 1$). Таким образом, $\alpha -$ 3-дискриминант.

Пример 2. Рассмотрим 5-дискриминант $\beta = [\ 7, \overline{3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 35}\ ]$. Используя формулы (4), приходим к равенству

$$\beta = \frac{\sqrt{10491117} - 1911}{182}.$$

Следствие 1. *Для того чтобы ЦД* $[\ q_0, \overline{q_1,\ q_2 ..., q_2,\ q_1,\ sq_0}\ ]$ *являлась разложением числа* $\sqrt{D}-b$, *необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$(\ sq_0Q_{n-1}+Q_{n-2} \vdots P_{n-1}\ ) \ \wedge \ (\ sq_0P_{n-1} \vdots 2\ )\ .$$

Пример 3. ЦД $\gamma = [\ 2, \overline{1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1,\ 16}\ ]$ удовлетворяет всем условиям следствия 1. Действительно,

$$\frac{P_5}{Q_5} = [\ 1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1\ ] = \frac{125}{68}, \quad Q_4 = 37, \quad sq_0Q_5 + Q_4 = 1125 \vdots 125.$$

Легко видеть, что $\gamma = \sqrt{73} - 6$.

Из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Для того чтобы ЦД* $[\ q_0, \overline{q_1,\ q_2 ..., q_2,\ q_1,\ 2q_0}\ ]$ *являлась разложением числа* $\sqrt{D}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$2q_0Q_{n-1} + Q_{n-2} \vdots P_{n-1}$$

Пример 4. Пусть $\delta = [\ 14, \overline{1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 28}\ ]$. Тогда

$$\frac{P_4}{Q_4} = [\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1\ ] = \frac{33}{23}, \quad Q_3 = 16, \quad 2q_0Q_4 + Q_3 = 660 \vdots 33.$$

Таким образом, данная ЦД на основании следствия 2 является разложением числа $\sqrt{D}$. По формулам (4) $\delta = \sqrt{216}$.

Легко видеть, что любой $s-$дискриминант α удовлетворяет следующему квадратному уравнению
$P_{n-1}x^2 + (s-2)q_0P_{n-1}x - c = 0$, где $c = (s-1)q_0^2P_{n-1} + sq_0Q_{n-1} + Q_{n-2} > 0$.
Имеет место

Следствие 3. *Если выполнено условие* (3), *то* $D - b^2 = 2ac,\ D - (aq_0 + b)^2 \vdots a$.

2. s−уравнение Пелля и его решения. Пусть $D-$ натуральное число, не являющееся точным квадратом. Рассмотрим диофантово уравнение

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = a^2, \tag{6}$$

где $\alpha = \dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ – $s-$дискриминант, $a \neq 1$. Это уравнение будем называть *$s-$уравнением Пелля.*

Квадратичная форма $\{a^2, 2ab, b^2 - D\}$, порождающая уравнение (6) и квадратичная форма $\{1, 0, -D\}$, порождающая уравнение Пелля , неэквивалентны, так как имеют разные дискриминанты, соответственно, $4a^2D$ и $4D$ [2].

Отметим также, что при $a = 1$ уравнение (6) эквивалентно уравнению Пелля.

Лемма 1. *Если $D-$ число, не являющееся точным квадратом, то существует константа* $M > a^2 > 0$, *что неравенство*

$$|\ (ax + by)^2 - Dy^2\ | < \ M$$

имеет бесконечное множество взаимно простых натуральных решений.

Доказательство. Так как $(ax+by)^2 - Dy^2 = (ax - (\sqrt{D}-b)y)(ax + (\sqrt{D}+b)y)$ и существует бесконечное множество пар натуральных чисел x, y , таких что
$(x, y) = 1$, и $|\ xy^{-1} - \alpha\ | < y^{-2}$ [2], то $|\ ax - (\sqrt{D} - b)y\ | < \ ay^{-1}$, и

$$|\ ax + (\sqrt{D} + b)y\ | < |\ ax - (\sqrt{D} - b)y\ | + 2\sqrt{D}\ y \ < \ \frac{a}{y} + 2\sqrt{D}\ y.$$

Отсюда

$$|\ (ax + by)^2 - Dy^2\ | < \ \frac{a}{y}\left(\frac{a}{y} + 2\sqrt{D}\ y\right) = \frac{a^2}{y^2} + 2\sqrt{D}\ a \ < \ a^2 + 2\sqrt{D}\ a.$$

Лемма доказана. □

Из леммы следует бесконечность множества положительных решений уравнения (6).

На множестве всех положительных решений указанного уравнения введём отношение частичного порядка $\prec$, считая, что $\langle x,y\rangle \prec \langle u,v\rangle \Leftrightarrow ax+(\sqrt{D}+b)y \leq au+(\sqrt{D}+b)v$. Рассмотрим наименьшее положительное решение ϕ. Такое решение существует и единственно. Назовём его *фундаментальным* или *основной единицей*.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha=\dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ *s−дискриминант. Тогда:*
а) если $\langle x_*,y_*\rangle$ *− положительное решение уравнения* (6), *то* $\dfrac{x_*}{y_*}$ *− одна из ПД к числу* α ;
б) если $\langle x',y'\rangle$*− положительное решение уравнения* (6), *то* $x'=P_{kn-1}, y'=Q_{kn-1}$, *где* k *− период разложения* α *в ЦД,* $n\in\mathbb{N}$;
в) все положительные решения s−уравнения Пелля исчерпываются формулами $\langle P_{km-1}\ ,\ Q_{km-1}\rangle$, *где* $m\in\mathbb{N}$ *− таково, что* km *− чётное число.*

Доказательство.
а) если $(ax_*+by_*)^2-Dy_*^2=a^2$, то

$$\left(x_*-\frac{\sqrt{D}-b}{a}\,y_*\right)\left(x_*+\frac{\sqrt{D}+b}{a}\,y_*\right)=1,\ \text{и}\ \ \frac{x_*}{y_*}>\frac{\sqrt{D}-b}{a}\ .$$

Отсюда

$$\left|\frac{x_*}{y_*}-\frac{\sqrt{D}-b}{a}\right|=\frac{1}{y_*^2\left|\dfrac{x_*}{y_*}+\dfrac{\sqrt{D}+b}{a}\right|}<\frac{1}{2y_*^2}\ ,$$

и, следовательно, $\dfrac{x_*}{y_*}$ − ПД к α [2].
б) пусть k − период разложения α в ЦД и $\frac{P_j}{Q_j}$ − ПД к этому числу, числитель и знаменатель которой образуют решение $\langle P_j,Q_j\rangle$ уравнения (6). Число α является корнем квадратного уравнения $a^2x^2+2abx-(D-b^2)=0$. Остаток r_{j+1} порядка $j+1$ разложения α в ЦД является корнем квадратного уравнения $A_{j+1}x^2+B_{j+1}x+C_{j+1}=0$ [2] , где

$$A_{j+1}=a^2P_j^2+2abP_jQ_j-(D-b^2)Q_j^2=a^2\ ,$$

$$B_{j+1}=2a^2P_jP_{j-1}+2ab(P_jQ_{j-1}+P_{j-1}Q_j)-2(D-b^2)Q_jQ_{j-1}=-2la$$

чётное число. Отсюда $r_{j+1}=\frac{\sqrt{D}+l}{a}$. Однако r_{j+1} раскладывается в чисто периодическую ЦД с периодом такой же длины, что у α и составленным из тех же элементов, записанных, вообще говоря, в другом порядке, поскольку данный остаток принадлежит полной системе приведённых иррациональностей, порождённых числом α [1] . При этом

$$r_{j+1}=\frac{\sqrt{D}+l}{a}=\alpha+\frac{(l-b)+2b}{a}=\alpha+(s-1)q_0+\frac{l-b}{a}-q_0,$$

откуда следует, что $l=b+aq_0,\ r_{j+1}=\alpha+(s-1)q_0$. Следовательно, $j+1=kn,\ n\in\mathbb{N}$ и $j=kn-1$.
в) пусть $\omega=[\ \overline{sq_0,\ q_1,...,\ q_1}\ ]=\alpha+(s-1)q_0$ и $m\in\mathbb{N}$. Запишем число α в виде: $\alpha=[\ q_0,\ q_1,\ q_2,...,q_2,\ q_1,\ sq_0,\ q_1,\ q_2,...,q_2,\ q_1,\ sq_0,...,q_1,\ q_2,...,q_2,\ q_1,\ \omega\ ]$.

Тогда

$$\alpha=\frac{\omega P_{mk-1}+P_{mk-2}}{\omega Q_{mk-1}+Q_{mk-2}}=\frac{(\alpha+(s-1)q_0)P_{mk-1}+P_{mk-2}}{(\alpha+(s-1)q_0)Q_{mk-1}+Q_{mk-2}}.$$

Последнее равенство эквивалентно системе уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rl} q_0Q_{km-1}+Q_{km-2}= & P_{km-1}\\ (D-b(aq_0+b))Q_{km-1}-abQ_{km-2}= & (aq_0+b)aP_{km-1}+a^2P_{km-2}.\end{array}\right.$$

Подставляя первое уравнение системы в её второе уравнение, получим:

$$(-1)^{km}a^2=a^2(P_{km-1}Q_{km-2}-P_{km-2}Q_{km-1})=$$

$$=a^2P_{km-1}(P_{km-1}-q_0Q_{km-1})-((D-b^2)Q_{km-1}-a^2(s-1)q_0P_{km-1})Q_{km-1}=$$

$$=a^2P_{km-1}^2+a^2(s-2)q_0P_{km-1}Q_{km-1}-(D-b^2)Q_{km-1}^2=(aP_{km-1}+bQ_{km-1})^2-DQ_{km-1}^2.$$

Таким образом, пара чисел $\langle\ P_{km-1}\ ,\ Q_{km-1}\ \rangle$ удовлетворяет $s-$уравнению Пелля (6) тогда и только тогда, когда $km -$ чётное. Лемма доказана. $\square$

Отметим, что любое решение $\langle x, y\rangle$ $s-$уравнения Пелля с $x > 0$ и $ax + by > 0$ параметризуется уравнениями

$$\begin{cases} x = & \mathrm{ch} t - \dfrac{b\ \mathrm{sh} t}{\sqrt{D}}, \\ \\ y = & \dfrac{a\ \mathrm{sh} t}{\sqrt{D}}\ , \end{cases} \tag{7}$$

где $t \in \mathbb{R}$ таково, что x, y определяют целочисленное решение уравнения (6) с $x > 0$ и $ax + by > 0$.

Обозначим через $\mathfrak{P}_s -$ множество всех целочисленных решений $s-$уравнения Пелля с $x > 0$ и $ax + by > 0$. На этом множестве определим бинарную операцию $\divideontimes$ следующим образом:

$$\langle x, y\rangle \divideontimes \langle u, v\rangle := \left\langle xu + \frac{(D - b^2)yv}{a^2}\ ,\ xv + yu + (s-2)q_0 yv \right\rangle. \tag{8}$$

Отметим, что в силу условия (3), а также следствия 3 из теоремы 1
$\dfrac{(D - b^2)yv}{a^2} = \dfrac{2cyv}{a} \in \mathbb{Z}.$

Правая часть равенства (8), как легко видеть, определяет также некоторое решение $s-$уравнения Пелля. Операция $\divideontimes$ коммутативна и ассоциативна. Более того, имеет место

Лемма 3. $\langle \mathfrak{P}_s\ ;\ \divideontimes\rangle -$ *циклическая абелева группа с порождающим элементом* ϕ.

Доказательство. Пара $\phi^0 := \varepsilon = \langle 1, 0\rangle$, удовлетворяя уравнению (6), является единицей в $\mathfrak{P}_s$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\phi^n \in \mathfrak{P}_s$. Кроме того операция $\divideontimes$ обратима:

$$\langle x, y\rangle^{-1} = \langle\ x + (s-2)q_0 y\ ,\ -y\ \rangle \in \mathfrak{P}_s\ \ \forall\ \langle x, y\rangle \in \mathfrak{P}_s.$$

Следовательно, $\phi^{-n} \in \mathfrak{P}_s\ \ \forall\ n\ \in \mathbb{N}$.

Пусть Θ_s (Θ_s^+) - множество всех вещественных (положительных) чисел t, для которых формулы (7) определяют целочисленные (положительные) решения $s-$уравнения Пелля. Рассмотрим биективное отображение $f : \mathfrak{P}_s \to \Theta_s$, где $f(\langle x, y\rangle) := t$. Здесь t определяет x и y по формулам (7). Из определения f и (8) вытекает, что Θ_s - абелева группа относительно сложения, а также, что группы $\mathfrak{P}_s$ и Θ_s изоморфны. Так как в силу равенства $(ax + by) + \sqrt{D}y = ae^t$ отображение f индуцирует порядок в Θ_s^+, то в Θ_s^+ есть наименьший элемент t_ϕ.

Группа Θ_s - циклическая. В самом деле, если существует $\widetilde{t} \in \Theta_s$, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\widetilde{t} \neq nt_\phi$, то $t_\phi > t_1 = \widetilde{t} - \left[\dfrac{\widetilde{t}}{t_\phi}\right] t_\phi > 0$. Отсюда $t_1 \in \Theta_s^+$, вопреки определению t_ϕ. Лемма доказана. $\square$

Положим $\mathfrak{P}_s^* = \{\ < -x, -y >\ |\ < x, y > \in \mathfrak{P}_s\ \}$ и сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha\ -\ s-$*дискриминант,* $k\ -$ *длина периода разложения* α *в ЦД. Соответствующее* α s*-уравнение Пелля* (6) *имеет бесконечное множество* $\mathfrak{P}_s \cup \mathfrak{P}_s^*$ *целочисленных решений. Любое решение из* $\mathfrak{P}_s$ *- это целая степень основной единицы* $\phi = \langle P_{kn_0-1}, Q_{kn_0-1}\rangle$*, где* $n_0 \in \mathbb{N} -$ *наименьшее число, для которого* kn_0 *чётное,* $\dfrac{P_{kn_0-1}}{Q_{kn_0-1}}$ *- ПД к* α*. Степень единицы понимается в смысле равенства* (8).

Пример 5. Рассмотрим уравнение вида $5x^2 + 5xy - 23y^2 = 5$, которое, как не трудно заметить, приводится к виду: $(10x + 5y)^2 - 485y^2 = 100$. Отсюда $\alpha = \dfrac{\sqrt{485} - 5}{10} = [1, \overline{1, 2, 2, 1, 3}]$, $s = 3$, $k = 5$. Фундаментальное решение данного 3-уравнения Пелля $\phi = \langle P_9\ ,\ Q_9\rangle = \langle 749\ ,\ 440\rangle$. Все решения данного уравнения согласно теореме 2 имеют вид $\phi_n^+ = \langle 749, 440\rangle^n$, $\phi_n^- = \langle 1189, -440\rangle^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Диофантово уравнение $(\mathbf{ax}+\mathbf{by})^2-\mathbf{Dy^2}=-\mathbf{a^2}$. Рассмотрим теперь диофантово уравнение вида

$$(ax+by)^2-Dy^2=-a^2, \tag{9}$$

где $\alpha=\dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ – $s-$дискриминант. Аналогично доказывается

Лемма 4. *Пусть $\alpha=\dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ $s-$дискриминант. Тогда:*
а) если $\langle x_*,y_*\rangle-$ положительное решение уравнения (9), то $\frac{x_*}{y_*}$ – одна из ПД к числу α ;
б) если $\langle x',y'\rangle-$ положительное решение уравнения (9), то $x'=P_{kn-1}, y'=Q_{kn-1}$, где $k-$ период разложения α в ЦД, $n\in\mathbb{N}$;
в) все положительные решения $s-$уравнения Пелля исчерпываются формулами $\langle P_{km-1}\ ,\ Q_{km-1}\rangle$, где $m\in\mathbb{N}-$ таково, что $km-$ нечётное число;
г)уравнение (9) разрешимо тогда и только тогда, когда период разложения α в ЦД есть нечётное число.

Обозначим через $\mathfrak{M}_s$ множество всех целых решений $\langle x,y\rangle$ уравнения (9) с $y>0$. Порядок $\prec$ в $\mathfrak{M}_s$ зададим также как и в $\mathfrak{P}_s$. Пусть $\omega-$наименьший положительный элемент в $\mathfrak{M}_s$ (фундаментальное решение). Указанное множество решений параметризуется следующим образом:

$$\begin{cases} x= & \mathrm{sh}t-\dfrac{b\ \mathrm{ch}t}{\sqrt{D}}, \\ \\ y= & \dfrac{a\ \mathrm{ch}t}{\sqrt{D}}\ , \end{cases} \tag{10}$$

где $t\in\mathbb{R}$ таково, что x,y определяют целочисленное решение уравнения (9) с $y>0$.

Зададим на множестве $\mathfrak{M}_s$ бинарную операцию $\circledast$, такую же, как на множестве $\mathfrak{P}_s$. Операция эта обладает следующими, легко проверяемыми свойствами:

А) $\forall\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in\mathfrak{M}_s\quad\langle x,y\rangle\circledast\langle u,v\rangle\in\mathfrak{P}_s$;

Б) $\forall\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle,\langle h,w\rangle\in\mathfrak{M}_s\quad\langle x,y\rangle\circledast\langle u,v\rangle\circledast\langle h,w\rangle\in\mathfrak{M}_s$.

Обозначим через Ω_s (Ω_s^+) множество всех вещественных (положительных) t, для которых формулы (10) определяют целочисленные (положительные) решения уравнения (9), а через $g:\mathfrak{M}_s\to\Omega_s$ ($g(\langle x,y\rangle):=t$)$-$биективное отбражение, связывающее t с $\langle x,y\rangle$ по формулам (10). Отображение g индуцирует порядок в Ω_s^+. Пусть $t_\omega-$наименьший элемент в Ω_s^+. Из определения отображения g и формул (10) устанавливаем, что:

А$'$) $\forall\ t_1,t_2\in\Omega_s\ \ t_1+t_2\in\Theta_s$;

Б$'$) $\forall\ t_1,t_2,t_3\in\Omega_s\ \ t_1+t_2+t_3\in\Omega_s$.

Используя доказательство леммы 3 устанавливаем, что $\Omega_s=\{\ t_\omega^{2n+1}\ \mid\ n\in\mathbb{Z}\ \}$. Следовательно,

$$\mathfrak{M}_s=\{\ \omega^{2n+1}\mid n\in\mathbb{Z}\ \}.$$

Положим $\mathfrak{M}_s^*=\{\ <-x,-y>\ \mid\ <x,y>\in\mathfrak{M}_s\ \}$.Тогда имеет место

Теорема 3. *Пусть α – $s-$дискриминант, k – длина периода разложения α в ЦД. Соответствующее α уравнение (9) имеет бесконечное множество $\mathfrak{M}_s\cup\mathfrak{M}_s^*$ целочисленных решений в том и только в том случае, когда k нечётное. В случае чётного k данное уравнение не разрешимо.*

Пример 6. Рассмотрим уравнение вида $(10x+5y)^2-485y^2=-100$. Фундаментальное решение данного уравнения $\omega=\langle P_4\ ,\ Q_4\rangle=\langle 17\ ,\ 10\rangle$. Все решения данного уравнения согласно теореме 3 имеют вид
$\omega_n^+=\langle 17,10\rangle^{2n+1},\ \omega_n^-=\langle -27,10\rangle^{2n+1},\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

В заключение отметим, что аналогично исследуются на разрешимость и решаются диофантовы уравнения вида $(ax+by)^2-Dy^2=\pm N$, где $\alpha=\dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ – $s-$дискриминант, $N\in\mathbb{N}$.

Выводы

Предложенное в данной заметке обобщение уравнения Пелля, в отличие от известных ранее, основано на обобщении ЦД вида (1). Более широкий класс $s-$уравнений Пелля порождается более широким классом КИ ($s-$дискриминантов), описание которых также получено в настоящей работе. Метод решения $s-$уравнения Пелля, по сути, такой же, что и в классическом случае, и не требует поэтому никаких эквивалентных преобразований.

Список литературы

[1] Венков Б.А. Элементарная теория чисел // М.:ОНТИ НКТП СССР, 1937. - 219 с.

[2] Бухштаб А.А. Теория чисел // М.: Гос.уч.-пед.изд.Мин.просв.РСФСР, 1960. - 376 с.

[3] Robertson J. Computing in Quadratic Orders// available at http://hometown.aol.com/jpr2718/ . - 2006.

[4] Robertson J. Solving the generalized Pell equation $x^2 - Dy^2 = N$//available at http://hometown.aol.com/jpr2718/ . - 2004.

[5] Mollin R.A. Quadratic equations determined by continued fractions//JP J.Algebra Number Theory Appl., - 2001. - Vol.1. - No.1. - P.57-75.

[6] Robertson J. Solving the equation $ax + bxy + cy + dx + ey + f = 0$//available at http://hometown.aol.com/jpr2718/ . - 2003.

[7] Matthews K. The diophantine equation $ax^2 + bxy + cy^2 = N,\ D = b^2 - 4ac > 0$ //J. Théor. Nombres Bordeaux. - 2002. - Vol.14. - P.257-270.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
просп. Вернадского, 4, 95036, Симферополь, Украина
E-mail: `tretyakov_d_v@mail.ru`

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.984

А.П. Хромов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

Пусть A — интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

где $\theta(x)$ — инволюция, т.е. $\theta^2(x) = \theta(\theta(x)) \equiv x$. Приведем хорошо известные примеры инволюций: а) $\theta(x) = 1 - x$, б) $\theta(x) = \frac{1-x}{ax+1}$, где $a > -1$, в) $\theta(x)$ находится из уравнения $\varphi(x) + \varphi(y) = 1$, где $\varphi(x)$ монотонно возрастает и $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Инволюция $\theta(x)$ порождает оператор отражения: $Sf(x) = f(\theta(x))$. Дифференциальные операторы с операторами отражения имеют давнюю историю и интенсивно исследуются в настоящее время ([1]–[8]). Операторы вида (1) в случаях а) и б) изучались в [5]–[8].

Приведем еще следующие свойства инволюций (мы рассматриваем только непрерывные инволюции). Прежде всего отметим, что функция $y = \theta(x)$ является инволюцией тогда и только тогда, когда ее график симметричен относительно главной диагонали $y = x$. Далее, наиболее интересный случай в) охватывает все инволюции. Приведем соответствующее рассуждение, принадлежащее В.В.Корневу. Пусть $\theta(x)$ наперед заданная инволюция. Существует единственная точка x_0, такая, что $\theta(x_0) = x_0$. Пусть $\varphi_0(x)$ — произвольная непрерывная строго возрастающая функция на $[0, x_0]$ и $\varphi_0(x_0) = 1/2$. Введем, далее, функцию $\varphi_1(x) = 1 - \varphi_0(\theta(x))$ при $x \in [x_0, 1]$. Положим $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ при $x \in [0, x_0]$ и $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ при $x \in [x_0, 1]$. Покажем, что $\varphi(x) + \varphi(\theta(x)) = 1$. В самом деле, пусть $x \in [0, x_0]$. Тогда $\varphi(x) + \varphi(\theta(x)) = \varphi_0(x) + \varphi_1(\theta(x)) = \varphi_0(x) + 1 - \varphi_0(\theta^2(x)) = 1$. Пусть $x \in [x_0, 1]$. Тогда $\varphi(x) + \varphi(\theta(x)) = \varphi_1(x) + \varphi_0(\theta(x)) = 1 - \varphi_0(\theta(x)) + \varphi_0(\theta(x)) = 1$.

Наконец, приведем еще следующие факты.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(x, y)$ вещественная симметричная функция при $x, y \in [0, 1]$ и для каждого $x \in [0, 1]$ существует только одно $y = \theta(x)$, что $\Phi(x, \theta(x)) = 0$. Тогда $\theta(x)$ — инволюция.*

В самом деле, из $\Phi(x, \theta(x)) = 0$ следует $\Phi(\theta(x), \theta^2(x)) = 0$. Но $\Phi(x, \theta(x)) = = \Phi(\theta(x), x)$. Значит, $x = \theta^2(x)$.

Теорема 2. *Если $\theta(x)$ — инволюция, то существует симметричная вещественная функция $\Phi(x, y)$, что $y = \theta(x)$ является единственным решением уравнения $\Phi(x, y) = 0$.*

В самом деле, положим $\Phi(x, y) = |x - \theta(y)|^2 + |y - \theta(x)|^2$. Тогда $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$. Далее,

$$\Phi(x, \theta(x)) = |x - \theta^2(x)|^2 + |\theta(x) - \theta(x)|^2 = 0,$$

т.е. $\theta(x)$ есть решение $\Phi(x, y) = 0$. Докажем единственность решения этого уравнения. Пусть $\theta_1(x)$ другое решение. Тогда имеем

$$\Phi(x, \theta_1(x)) = |x - \theta(\theta_1(x))|^2 + |\theta_1(x) - \theta(x)|^2 = 0.$$

Отсюда $\theta_1(x) = \theta(x)$ и $x = \theta(\theta_1(x)) = \theta^2(x)$.

Предположим, что инволюция $\theta(x)$ в (1) трижды непрерывно дифференцируема, монотонно убывает, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$ и $\theta'(x) < 0$. Пусть, далее $A(x, t)$ и A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2} $\left(A_{x^jt^k} = \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} A(x, t)\right)$ непрерывны при $t \le x$ и $A(x, x) \equiv 1$. Тогда имеют место следующие результаты.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003)

Лемма 1. *Оператор A^{-1} существует и*

$$A^{-1}y = \theta'(x)y'(\theta(x)) + N(x,x)y(\theta(x)) - N_t y(\theta(x)), \quad y(1) = 0,$$

где $N(x,t)$ ядро интегрального оператора $(E + A_x)^{-1} - E$, E — единичный оператор, $A_x f(x) = \int\limits_0^x A_x(x,t)f(t)\,dt$, $N_t f(x) = \int\limits_0^x N_t(x,t)f(t)\,dt$.

Лемма 2. *Если $y = (E-\lambda A)^{-1}Af$, то $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(\theta(x))$ удовлетворяет системе*

$$\tilde{Q}(x)z'(x) + \tilde{P}(x)z(x) + \tilde{N}z(x) - \lambda z(x) = \tilde{m}(x), \tag{2}$$

$$\tilde{M}_0 z(0) + \tilde{M}_1 z(1) = 0 \tag{3}$$

где $\tilde{Q}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ (\theta'(x))^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & N(x,x) \\ N(\theta(x),\theta(x)) & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{N}z(x) = \int\limits_0^1 \tilde{N}(x,t)\times$ $\times z(t)\,dt$, $\tilde{N}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon(x,t)N_t'(x,t) \\ 0 & -\varepsilon(\theta(x),t)N_t'(\theta(x),t) \end{pmatrix}$, $\varepsilon(x,t) = 1$ при $t \le x$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $t > x$, $\tilde{m}(x) = (m_1(x), m_2(x))^T$, $m_1(x) = f(x)$, $m_2(x) = f(\theta(x))$, $\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим $D(x) = \operatorname{diag}(\omega_1(x), \omega_2(x))$, $\omega_{1,2}(x) = \pm i d_1(x)$, $d_1(x) = \sqrt{-\theta'(x)}$, $\Gamma(x) = \begin{pmatrix} \omega_1(x) & \omega_2(x) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $D(x) = \Gamma^{-1}(x)\tilde{Q}^{-1}(x)\Gamma(x)$.

Лемма 3. *Преобразование $z(x) = \Gamma(x)y(x)$ ($y(x)$ имеет новый смысл) приводит систему (2)–(3) к виду*

$$y'(x) + P(x)y(x) + Ny(x) - \lambda D(x)y(x) = m(x), \tag{4}$$

$$M_0 y(0) + M_1 y(1) = 0, \tag{5}$$

где $P(x) = \Gamma^{-1}(x)\Gamma'(x) + \Gamma^{-1}(x)\tilde{Q}^{-1}(x)\tilde{P}(x)\Gamma(x)$, $N = \Gamma^{-1}(x)\tilde{Q}^{-1}(x)\tilde{N}\Gamma(x)$, $m(x) = \Gamma^{-1}(x)\tilde{Q}^{-1}(x)\tilde{m}(x)$, $M_0 = \tilde{M}_0\Gamma(0)$, $M_1 = \tilde{M}_1\Gamma(1)$.

Лемма 4. *Существует матрица-функция 2×2: $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена и диагональна, а $H_1(x)$ — кодиагональна, что преобразование $y(x) = H(x,\lambda)v(x)$ приводит систему (4)-(5)к виду*

$$v'(x) + P(x,\lambda)v(x) + N_\lambda v - \lambda D(x)v(x) = m(x,\lambda),$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0,$$

где $P(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)[H_1'(x) + P(x)H_1(x)]$, $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda)$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$, $M_{0\lambda} = M_0 H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1 H(1,\lambda)$.

Рассмотрим еще систему

$$w'(x) - \lambda D(x)w(x) = m(x), \tag{6}$$

$$U(w) = 0, \tag{7}$$

где $m(x) = (m_1(x), m_2(x))^T$ и $m_i(x) \in L[0,1]$. Положим $\mu = \lambda i$ и для определенности считаем, что $\operatorname{Re}\mu \ge 0$.

Лемма 5. *Решение $w(x,\mu)$ задачи (6)–(7) имеет вид*

$$w(x,\mu) = -Y(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)U(g_\mu m) + g_\mu m(x),$$

где $Y(x,\mu) = \operatorname{diag}(e^{\mu d(x)}, e^{-\mu d(x)})$, $d(x) = \int\limits_0^x d_1(t)\,dt$, $g_\mu m = \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt$, $g(x,t,\mu) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\mu), g_2(x,t,\mu))$, $g_1(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)e^{\mu(d(x)-d(t))}$, $g_2(x,t,\mu) = \varepsilon(x,t)e^{-\mu(d(x)-d(t))}$, $\Delta(\mu) = U(Y(x,\mu))$.

Леммы 1–5 методом статьи [8] приводят к следующему результату.

Теорема 3. *Если $f(x) \in L[0,1]$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - T_0^{-1}\sigma_r(T_0 f, x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon > 0$, $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$по собственным и присоединенным функциям оператора (1) для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ для тех k, для которых $|2k\pi| < r$, $T_0 f = f(\varphi_0(x))$, $\int\limits_0^{\varphi_0(x)} d_1(t)\,dt = x$.

Рассмотрим еще оператор

$$A_0 f = \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)\,dt,$$

где $A(x,t)$ то же ядро, что и у оператора (1). Определим $\theta(x)$ из уравнения $\varphi(x)+$ $+\varphi(\theta(x)) = 1$, где $\varphi(x)$ трижды непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция, причем $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ и $\varphi'(x)\neq 0$. Пусть $Tf = f(\varphi(x))$. Определим оператор $A_1 = TA_0T^{-1}$. Тогда

$$A_1 f = \int\limits_0^{\theta(x)} A_1(\theta(x),t) f(t)\,dt,$$

где $A_1(\theta(x),t) = A(\varphi(\theta(x)),\varphi(t))\varphi'(t)$. Ясно, что $A_1(x,x) = \varphi'(x)$.

Теорема 4. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_{1r}(f,x) - T\sigma_r(T^{-1}f, x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_{1,r}(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$по собственным и присоединенным функциям оператора A_1.

Образуем еще оператор $A_2 = T^{-1}AT$. Тогда

$$A_2 f = \int\limits_0^{1-x} A_2(1-x,t) f(t)\,dt,$$

где $A_2(1-x,t) = A(\theta(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)$. Отсюда $A_2(x,x) = (\varphi^{-1})'(x)$.

Теорема 5. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_{2r}(f,x) - T^{-1}T_0^{-1}\sigma_r(T_0Tf, x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_{2,r}(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$по собственным и присоединенным функциям оператора A_2.

Список литературы

[1] Babbage Ch. *An essay towards the calculus of functions* // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1816. – V.11. – P.179-226.

[2] Андреев А.А. *Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом* // Дифферен. уравн. – 2004. – Т.40, N.5. – С.1126-1128.

[3] Dankl Ch.G. *Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – V.311, N.1. – P.167-183.

[4] Платонов С.С. *Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов* // Тр. Петрозавод. госун-та. Сер. матем. – 2004. – Вып.11. – С.15-35.

[5] Хромов А.П. *Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях* // Матем. заметки. – 1998. – Т.64, N.6. – С.932-949.

[6] Корнев В.В., Хромов А.П. *О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях* // Матем. сб. – 2001. – Т.192, N.10. – С.33-50.

[7] Белоусова Л.П. *Теорема равносходимости спектральных разложений двух интегральных операторов* // Современ. проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 10-й Сарат. зимн. школы. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. – С.17.

[8] Хромов А.П. *О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования* // Интегральные преобразования и специальне функции: Информ. бюллетень. – 2006. – Т.6, N.1. – С.46-55.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
ул. Астраханская 83, 410012, Саратов, Россия
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.984 MSC2000: 34A55 34B24 47E05

В.А. Юрко

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ [1]

В статье исследуется обратная узловая задача для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля на звездообразном дереве со стандартными условиями склейки во внутренней вершине. Обратная узловая задача заключается в восстановлении оператора по заданным узлам (нулям) собственных функций. Для данного класса операторов доказана теорема единственности и приведена конструктивная процедура решения обратной узловой задачи. Отметим, что эта задача тесно связана с обратными спектральными задачами (см. [1]-[2] и литературу в них).

Рассмотрим компактный звездообразный граф T в $\mathbf{R^m}$ с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, \dots, e_r\}$, где $v_1, \dots, v_r$ – граничные вершины, v_0 – внутренняя вершина, и $e_i = [v_i, v_0]$, $i = \overline{1, r}$. Не нарушая общности считаем, что длина каждого ребра равна 1. Каждое ребро $e_i \in E$ параметризуем параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: $x = 0$ соответствует граничным вершинам $v_1, \dots, v_r$, а $x = 1$ соответствует внутренней вершине v_0.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y(x) = \{y_i(x)\}_{i=\overline{1,r}}$, $x \in [0, 1]$, где функция $y_i(x)$ определена на ребре e_i. Пусть $q(x) = \{q_i(x)\}_{i=\overline{1,r}}$ – интегрируемая вещественнозначная функция на T; q называется потенциалом. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T:

$$-y_i''(x) + q_i(x)y_i(x) = \lambda y_i(x), \quad i = \overline{1, r}, \tag{1}$$

где λ – спектральный параметр, функции $y_i(x), y_i'(x)$, $i = \overline{1, r}$ абсолютно непрерывны на $[0, 1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренней вершине v_0:

$$y_i(1) = y_j(1),\ i, j = \overline{1, r}, \quad \sum_{i=1}^{r} y_i'(1) = 0. \tag{2}$$

Условия склейки (2) называются стандартными условиями или условиями Кирхгофа. В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей (2) выражает баланс напряжений и т.д.

Рассмотрим краевую задачу на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и со следующими краевыми условиями в граничных вершинах $v_1, \dots, v_r$:

$$y_i'(0) - h_i y_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, r}, \tag{3}$$

где h_i – вещественные числа. Эту задачу обозначим $B = B(q, h)$, где $h = \{h_i\}_{i=\overline{1,r}}$.

Пусть $\varphi_i(x, \lambda)$, $i = \overline{1, r}$ – решения уравнения (1) на ребре e_i с начальными условиями $\varphi_i(0, \lambda) = 1$, $\varphi_i'(0, \lambda) = h_i$. При каждом фиксированном $x \in [0, 1]$ функции $\varphi_i^{(\nu)}(x, \lambda)$, $i = \overline{1, r}$, $\nu = 0, 1$ являются целыми по λ порядка 1/2. Кроме того, функция $\varphi_i(x, \lambda)$ является единственным решением интегрального уравнения

$$\varphi_i(x, \lambda) = \cos \rho x + h_i \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho (x - t)}{\rho} q_i(t) \varphi_i(t, \lambda)\, dt, \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

где $\lambda = \rho^2$. Известно (см. [2]), что справедливо представление

$$\varphi_i(x,\lambda) = \cos\rho x + \int_0^x K_i(x,t)\cos\rho t\,dt, \tag{5}$$

где $K_i(x,t)$ – гладкая функция, не зависящая от λ. Используя (4) и (5), получаем асимптотические формулы для $\varphi_i(x,\lambda)$ и $\varphi_i'(x,\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$ равномерно по $x\in\ [0,1]$:

$$\varphi_i(x,\lambda) = \cos\rho x + \Big(h_i + \tfrac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt\Big)\tfrac{\sin\rho x}{\rho} + \tfrac{1}{2\rho}\int_0^x q_i(t)\sin\rho(x-2t)\,dt + O\Big(\tfrac{\exp(|Im\,\rho|x)}{\rho^2}\Big), \tag{6}$$

$$\varphi_i'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + \Big(h_i + \tfrac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt\Big)\cos\rho x + \tfrac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\cos\rho(x-2t)\,dt + O\Big(\tfrac{\exp(|Im\,\rho|x)}{\rho}\Big). \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$\Delta(\lambda) = \sum_{i=1}^r \frac{\varphi_i'(1,\lambda)}{\varphi_i(1,\lambda)}\prod_{k=1}^r \varphi_k(1,\lambda). \tag{8}$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B. В самом деле, пусть

$$Y(x,\lambda) = \{y_i(x,\lambda)\}_{i=\overline{1,r}}, \quad y_i(x,\lambda) = A_i(\lambda)\varphi_i(x,\lambda), \tag{9}$$

где функции $A_i(\lambda)$ не зависят от x. Функция $Y(x,\lambda)$ удовлетворяет (1) и (3). Подставляя (9) в (2), получим линейную однородную алгебраическую систему относительно $A_i(\lambda)$. Определитель этой системы есть $\Delta(\lambda)$. Если λ_0 является нулем $\Delta(\lambda)$, то функция $Y(x,\lambda_0)$ вида (9) есть собственная функция, а λ_0 – собственное значение задачи B. Обратно, если λ_0 – собственное значение, то соответствующая собственная функция имеет вид (9) при $\lambda=\lambda_0$. Так как $Y\neq 0$, то вышеупомянутая алгебраическая система имеет нетривиальное решение, и следовательно, $\Delta(\lambda_0)=0$. Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи B.

Подставляя (6) и (7) в (8), получаем

$$\Delta(\lambda) = r(-\rho\sin\rho)(\cos\rho)^{r-1} + \sum_{i=1}^r \Big(h_i + \frac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt\Big)(\cos\rho)^r -$$
$$-(r-1)\sum_{i=1}^r \Big(h_i + \frac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt\Big)(\cos\rho)^{r-2}\sin^2\rho + o\Big(\exp(r|Im\,\rho|)\Big), \quad |\lambda|\to\infty. \tag{10}$$

Используя (10), известным методом (см., например, [2], гл.1) получаем, что краевая задача B имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{ni}\}_{n\geq 0,\, i=\overline{1,r}}$. Все собственные значения вещественны и имеют асимптотику

$$\rho_{n1} := \sqrt{\lambda_{n1}} = n\pi + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad n\to\infty, \tag{11}$$

$$\rho_{ni} := \sqrt{\lambda_{ni}} = \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\pi + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad n\to\infty,\ i=\overline{2,r}.$$

Для определенности рассмотрим $\lambda_n := \lambda_{n1}$ и изучим их подробнее. Обозначим

$$\omega := \frac{2}{r}\sum_{i=1}^r \Big(h_i + \frac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt\Big). \tag{12}$$

Подставляя (11) в (10) и используя соотношение $\Delta(\lambda_n)=0$, получаем следующую асимптотическую формулу

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{\omega}{2\pi n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad n\to\infty. \tag{13}$$

Используя (6) и (13), приходим к асимптотике для компонент собственных функций при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [0,1]$:

$$\varphi_i(x,\lambda_n) = \cos n\pi x + \frac{\beta_i(x)}{2\pi n}\sin n\pi x + o\Big(\frac{1}{n}\Big), \text{ где } \beta_i(x) = \int\limits_0^x q_i(t)\,dt + 2h_i - \omega x. \tag{14}$$

Зафиксируем $i = \overline{1,r}$. Существует N_0 такое, что при всех $n > N_0$ функция $\varphi_i(x,\lambda_n)$ имеет ровно n (простых) нулей внутри интервала $(0,1)$, а именно: $0 < x_{ni}^1 < \dots < x_{ni}^{n-1} < 1$. Точки $X_i := \{x_{ni}^j\}$ называются узловыми точками на ребре e_i относительно собственных значений $\{\lambda_n\}$.

Зафиксируем $i = \overline{1,r}$. Будем рассматривать обратную узловую задачу восстановления потенциала $q_i(x)$ на ребре e_i и числа h_i по заданному множеству X_i узловых точек или по некоторой его части. Обозначим $\alpha_n^j := \frac{j-1/2}{n}$. Учитывая (14), получаем следующую асимптотическую формулу для узловых точек при $n \to \infty$ равномерно по j:

$$x_{ni}^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\Big(\int\limits_0^{\alpha_n^j} q_i(t)\,dt + 2h_i - \omega\alpha_n^j\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{15}$$

Отметим, что при каждом фиксированном $i = \overline{1,r}$ множество X_i является всюду плотным на $(0,1)$. Не нарушая общности считаем, что $\omega = 0$ (этого можно добиться сдвигом: $q_i(x) \to q_i(x) - \omega,\ \lambda \to \lambda - \omega$). Используя (15), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Зафиксируем $i = \overline{1,r}$ и $x \in [0,1]$. Пусть $X_i^0 \subset X_i$ всюду плотно на $(0,1)$. Пусть $\{x_{ni}^{j_{ni}}\} \in X_i^0$ выбраны так, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni}^{j_{ni}} = x$. Тогда существует конечный предел*

$$g_i(x) := \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 n\Big(n x_{ni}^{j_{ni}} - \Big(j_{ni} - \frac{1}{2}\Big)\Big), \quad \mathrm{g_i(x)} = \int\limits_0^{\mathrm{x}} \mathrm{q_i(t)\,dt + 2h_i}. \tag{16}$$

Сформулируем теперь теорему единственности и приведем конструктивную процедуру решения обратной узловой задачи. Для этого наряду с B рассмотрим краевую задачу $\tilde{B} = B(\tilde{q},\tilde{h})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче B, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{B}$.

Теорема 2. *Зафиксируем $i = \overline{1,r}$. Пусть $X_i^0 \subset X_i$ – всюду плотное на $(0,1)$ подмножество узловых точек. Пусть $X_i^0 = \tilde{X}_i^0$. Тогда $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п.в. на $(0,1)$, $h_i = \tilde{h}_i$. Таким образом, задание X_i^0 однозначно определяет потенциал $q_i(x)$ на ребре e_i и число h_i. Функция $q_i(x)$ и число h_i могут быть построены по формулам*

$$q_i(x) = g_i'(x), \quad h_i = \frac{g_i(0)}{2}\,, \tag{17}$$

где $g_i(x)$ вычисляется по (16).

В самом деле, формула (17) следует из (16). Если $X_i^0 = \tilde{X}_i^0$, то (16) дает $g_i(x) \equiv \tilde{g}_i(x),\ x \in [0,1]$, и следовательно, $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п.в. на $(0,1)$ и $h_i = \tilde{h}_i$.

Список литературы

[1] Yurko V.A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002.

[2] Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит, 2007.

Саратовский государственный университет
ул. Астраханская, 83, 410012, Саратов, Россия
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Proceeding of the International Conference

Crimea Autumn Mathematical School – Symposium 2007

УДК 517.518.26 MSC2000: 26E10, 46E35

G.S. Balashova

ON NONQUASIANALYTICAL CARLEMAN CLASSES

Nonquasianalytical Carleman classes of the functions of one real variable

$$C_J\{\widehat{M}_n\} \equiv \{f(x) \in C^\infty(J) : \max_{x\in J} |f^{(n)}(x)| \leq CK^n_{(f)}\widehat{M}_n, \quad n = 0, 1, \dots\} \tag{1}$$

are considered. That means that the sequence $\{\widehat{M}_n\}$ satisfies the following conditions:

$$\widehat{M}_0 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \widehat{M}_n^{1/n} = \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{M}_n^c}{\widehat{M}_{n+1}^c} < \infty, \tag{3}$$

where $\{\widehat{M}_n^c\}$ is the logarithmically convex regularization of $\{\widehat{M}_n\}$ (cf. [1]).

Definition 1. The indices $\{n_i\}$ such that

$$M_{n_i} = M_{n_i}^c$$

are called fundamental indices for the logarithmically convex regularization of $\{M_n\}$.

Definition 2. The sequence $\{M_n\}$ is called almost logarithmically convex if for all its fundamental indices the following condition is satisfied:

$$\sup_i (n_{i+1} - n_i) = K < \infty.$$

If $K = 1$ then the sequence $\{M_n\}$ is logarithmically convex.

The family of sequences $\{b_n\}$ such that

$$|b_n| \leq CK^n M_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad K = K(b_n) > 0,$$

is denoted as $B\{M_n\}$.

Proposition 1. Find conditions on the sequences $\{M_n\}$ and $\{\widehat{M}_n\}$ which guarantee for any sequence $\{b_n\} \in B\{M_n\}$ the existence of a function $f(x) \in C_{\mathbb{R}}\{\widehat{M}_n\}$ satisfying the following conditions:

$$f^{(n)}(0) = b_n, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4}$$

It is clear that $M_n \leq \widehat{M}_n$ for all $n = 0, 1, \dots$

In particular, the conditions of coincidence of $\{\widehat{M}_n\}$ and $\{M_n\}$ are analysed.

The problem was studied by T. Bang [2], E. Borel [3], T. Carleman [4], L. Carleson [5], G.Wahde [6], B.S.Mitiagin [7], L.Ehrenpreis [8], G.S.Balashova [9] and other authors.

Theorem 1. *For any sequence $\{b_n\} \in B\{M_n\}$ and any number $\alpha > 1$ there exists the function $f(x) \in C_{\mathbb{R}}\{\widehat{M}_n\}$ satisfying the condition (4), where*

$$\widehat{M}_n = n^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k}, \quad M'_k = \frac{M_k}{k^{\alpha k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Proof. We construct the desired function. It is known that there exists a function $\psi(x) \in C^{\infty}_{(\mathbb{R})}$ satisfying the following conditions:

1) $\psi(x) \geq 0$, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \psi(x) = \psi(0) = 1$, $\psi^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, ...$;

2) $\psi(x) = 0$, if $|x| > 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-1} = \delta$;

3) $\max\limits_{|x|<\delta} |\psi^{(n)}(x)| \leq \prod\limits_{j=1}^{n} \mu_j$, where $\mu_n > 0$ is an increasing sequence such that $\mu_0 = 1$ and $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-1} < \infty$.

The required function is

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \psi_k(d_k x),$$

where $\psi_k(x)$ satisfies the conditions 1)-3) with

$$\mu_n^{(k)} = (n+k)^{\alpha}, \quad d_k = K(\alpha) \frac{M'_{k+1}}{M'_k}.$$

□

Corollary 1. *If the sequence $\{M_n\}$ has the property that for some $\alpha > 1$ the sequence $\{M_k k^{-\alpha k}\}$ is almost logarithmically convex, then $\widehat{M}_n = M_n$.*

Example 1. 1°. If $M_n = n^{\alpha n} \ln^{\beta n} n$, $\alpha > 1$, $\beta \geq 0$, then $\widehat{M}_n = M_n$. When $\beta = 0$, we obtain the known result of L. Carleson, L. Ehrenpreis and B. Mitiagin.

2°. If $M_n = a^{n^{\alpha}} (n^{\beta} \ln^{\gamma} n)^n$, $a > 1$, $\alpha > 1$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, then $\widehat{M}_n = M_n$.

If the sequence $\{M_n\}$ grows slowlier than $n^{\alpha n}$, $\alpha > 1$, then the following is true:

Theorem 2. *If $M_n = (n \ln_r^{\gamma} n \ln_{r+s}^{\beta} n)^n$, $\gamma > 0$, $\beta \geq 0$, $r \geq 1$, $s \geq 1$, then there exists a function $f(x) \in C_{\mathbb{R}}(\widehat{M}_n)$ satisfying the condition (4), where $\widehat{M}_n = (n \ln_r^{\gamma+1} n \ln_{r+s}^{\beta} n)^n (\ln n \ln \ln n \ldots \ln_{r-1} n)^n$, $\ln_r n$ means r-times iterated logarithm.*

Proof is of a constructive character. The required function looks like $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} x^k \psi_k(dx)$, where the constant d is chosen, and the sequence $\mu_n^{(k)}$ is built as follows $\mu_n^{(k)} = (n+k) \ln(n+k) \ln\ln(n+k) \ldots \ln_{r-1}(n+k) \ln_r^{\gamma+1}(n+k) \ln_{r+s}^{\beta}(n+k)$.

Remark. When $r = 1$, $\gamma = 1$, $\beta = 0$, $M_n = (n \ln n)^n$, we obtain $\widehat{M}_n = (n \ln^2 n)^n$, which is the known result of L. Carleson.

While studying estimates of the norm of the n-th order derivative of a function $f(x)$ on the Lebesgue space of p-integrable functions ($1 \leq p < \infty$) there was obtained

Theorem 3. *If the sequence $\{\widehat{M}_n\}$ is logarithmically convex and for some $\alpha > 1$ the sequence $\{\widehat{M}_n n^{-\alpha n}\}$ is almost logarithmically convex, then for any sequence $b_n \in B\{M_n\}$, where $M_n = \widehat{M}_{n+1}^{1/p} \widehat{M}_n^{1-\frac{1}{p}}$, there exists an infinitely differentiable function on $\mathbb{R}$ such that*

$$f^{(n)}(0) = b_n \quad \textit{and} \quad \|f^{(n)}_{(x)}\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq C K^n \widehat{M}_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Remark. Theorem 3 makes sense only for such sequences $\{M_n\}$, for which the ratio $\frac{M_{n+1}}{M_n}$ grows in n times faster than the geometrical progression (for example, $M_n = 2^{n^s}$, $s > 2$, $n = 1, 2, \ldots$).

Remark. When $p = 1$ we have $M_n = \widehat{M}_{n+1}$. That result gives the best estimation for $\widehat{M}_n$ as it is evident that $\widehat{M}_{n+1} \geq M_n$. In fact, $K^{n+2} \widehat{M}_{n+1} \geq \|f^{(n+1)}(x)\|_{L_1(\mathbb{R})} \geq \int\limits_0^{\infty} |f^{(n+1)}(x)|\, dx \geq |\int\limits_0^{\infty} f^{(n+1)}(x)\, dx| = |f^{(n)}(0)| = |b_n|$.

The problem of the existence of a function with the given trace at the boundary of the domain $G \in \mathbb{R}$ in the space

$$W^{\infty}\{a_n, p\}_(G) \equiv \left\{ u(x) \in C^{\infty}_{(G)} : \ \varrho(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\| D^n u(x) \right\|^p_{L_p(G)} < \infty \right\} \tag{5}$$

is very closely related to the one mentioned above (see [10], [11]). Here $a_n \geq 0$, $1 \leq p < \infty$. These spaces are the energy spaces for the differential equations of infinite order the model example of which is the following

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^n (a_n |D^n u|^{p-2} D^n u) = h(x), \quad x \in G \ (0, a) \tag{6}$$

$$D^n u(0) = b_n, \quad D^n u(a) = c_n, \quad n = 0, 1, \dots \tag{7}$$

For the solvability of the problem (6), (7) we should first of all investigate the conditions of existence of a function in the space (5), satisfying the conditions (7).

We will suppose that the space (5) is nontrivial which means that the space

$$\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_n, p\}_{(0,a)} \equiv \{u(x) \in C^{\infty}_0(0, a),\ \varrho(u) < \infty\}$$

contains at least one function other than that which is identical to zero. Yu. Dubinskij [11] showed that this is the case if and only if the sequence $\{M_n\}$ defined by $M_n = a_n^{-1/p}$ for $a_n \neq 0$ and $M_n = \infty$ for $a_n = 0$, specifies a nonquasianalytic Carleman class (1), i.e., the conditions (2), (3) hold for $\{M_n\}$.

Theorem 4. *A necessary and sufficient condition for the sequence $\{b_n\}$ to be extendable in any space $W^{\infty}\{a_n,\}_{(0,a)}$ is*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} |b_n|^{1/n} = K < \infty. \tag{8}$$

We shall call a trace satisfying the condition (8) analytical.

Remark. For any space $W^{\infty}\{a_n, p\}_{(0,a)}$ there exists a nonanalytic trace extendable in this space.

Theorem 5. *For the sequence $\{b_n\}$ to be extendable in the space $W^{\infty}\{a_n, p\}_{(0,a)}$, the following condition is necessary:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}^{1/p} a_n^{1-\frac{1}{p}} |b_n|^p < \infty. \tag{9}$$

Theorem 6. *Let the sequence $\{a_n\}$ be such that*

$$1 > a_n^q \geq a_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad a_0 > 0, \tag{10}$$

for some $q > 1$. Then for the existence of a function $u(x) \in W^{\infty}\{a_n, p\}_{(0,a)}$ with the given trace $\{b_n\}$, the condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^p (M_n^c)^{-(1-\frac{1}{p})} (M_{n+1}^c)^{\frac{-1}{p}} < \infty \tag{11}$$

is necessary and sufficient.

Remark. If the sequence $\{a_n\}$ satisfies the condition (10) and the sequence $\{a_n^{-1}\}$ is almost logarithmically convex, then $M_n^c = a_n^{-1}$ and the condition (11) coincides with the condition (9).

Remark. Proofs of Theorems 4–6 can be found in the paper [10].

References

[1] Mandelbroit S. *Adjoining Series. Regularization of Sequences. Applications.* // Izdat. Inostrannoj Literatury, Moskva – 1995.(In Russian.)

[2] Bang T. *On quasi-analytiske funktioner.* //Thèse, Kyøbenhavn – 1946.

[3] Borel E. *Sur les fonctions d'une variable réelle indéfiniment dérivables.* //C. R. Acad. Sci. – 1922. – V. 174.

[4] Carleman T. *Les fonctions quasi-analytiques.* //Paris – 1926.

[5] Carleson L. *On universal moment problems.* //Math. Scand. – 1961. – V.9, N.2. – p.197-206.

[6] Wahde G. *Interpolation on non-quasi-analytic classes of infinitely differentiable functions.* //Math. Scand. – 1967. – V.20, N.1. – p.19-31.

[7] Mitiagin B.S. *On infinitely differentiable function with the values of its derivates given at a point.* //Dokl. Akad. Nauk SSSR – 1961. – V.138. – p.289-292.

[8] Ehrenpreis L. *The punctual and local images of quasi-analytic and non-quasi-analytic classes.* //Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. – 1961. Mimeographed.

[9] Balashova G.S. *On extension of infinitely differentiable functions.* //Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. – 1987. – V.51, N.6. – p.1292-1308. (In Russian.)

[10] Balashova G.S. *Conditions for the extension of a trace and an embedding for Banach spaces of infinitely differentiable functions.* //Mat. Sb. – 1993. – V.184, N.1. – p.105-128. (In Russian.)

[11] Dubinskij Yu. A. *Traces of functions from Sobolev spaces of infinite order and inhomo- geneous problems for nonlinear equations.* //Mat. Sb. – 1978. – V.106(148), N.1. – p.66-84. (In Russian.)

Московский энергетический институт (Технический университет)
ул. Красноказарменная, 14, 111250, Москва, Россия
E-mail: BalashovaGS@mpei.ru

Proceeding of the International Conference

Crimea Autumn Mathematical School – Symposium 2007

УДК: 517.924.4, 51-73; MSC2000: 34B16, 34B40

N.B. Konyukhova, P.M. Lima, M.L. Morgado and M.B. Soloviev

SINGULAR NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BUBBLE–TYPE OR DROPLET–TYPE SOLUTIONS IN NONLINEAR PHYSICS MODELS [1]

Introduction

For a second–order nonlinear ordinary differential equation (ODE), a singular boundary value problem (BVP) is investigated which arises in hydromechanics and nonlinear field theory when static centrally symmetric bubble–type (droplet–type) solutions are sought. Being defined on a semi–infinite interval $0 < r < \infty$, this ODE, with a polynomial nonlinearity of the third order with respect to a desired function, possesses a regular singular point as $r \to 0$ and an irregular one as $r \to \infty$. Using some results for singular Cauchy problems (CPs) and stable initial manifolds (SIMs), we give the restrictions to the parameters for correct mathematical statement of the above singular nonlinear BVP, solving as well an accompanying problem concerning the transfer of the boundary condition from a singular point into a close regular one. Due to a certain variational approach and some results for so–called ground state problem, the necessary and sufficient conditions for existence of bubble–type or droplet–type solutions are discussed (in the form of additional restrictions to the parameters) and some estimates are obtained.

For a bubble model in the modern theory of nonhomogeneous or two–phase fluids with the equations of state depending on the derivatives, the singular nonlinear BVP under consideration has been posed and partially studied in [1] including numerical simulation of the problem (some preliminary results have been announced also in [2]–[4]).

In the present work we give briefly some results concerning a more complete and accurate theoretical analysis of this BVP and its applications. We don't present here the numerical methods and computational results. The detailed analytical–numerical investigation of the above singular nonlinear BVP, including physical interpretation of the numerical results, is assumed to be published in [5].

The authors would like to thank Dr. N.V.Chemetov, calling our attention on the hydromechanics model, for his aid in the description of this problem and useful information.

1. Statement of the problem and preliminary remarks

We study a singular nonlinear BVP of the form [1]:

$$\rho'' + \frac{N-1}{r}\rho' = 4\lambda^2(\rho+1)\rho(\rho-\xi), \qquad 0 < r < \infty, \tag{1}$$

$$|\lim_{r\to 0+} \rho(r)| < \infty, \qquad \lim_{r\to 0+} r\rho'(r) = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \xi, \qquad \lim_{r\to\infty} \rho'(r) = 0. \tag{3}$$

Here all the variables are real, N, λ and ξ are the parameters, $\lambda > 0$ (the multiple $4\lambda^2$ may be omitted by change of the variable r).

The following preliminary assertions are evident enough (for some details, see [1], [5]).

[1] N.B.Konyukhova and M.B.Soloviev acknowledge support from RFBR, projects No.05–01–00257 and No.08–01–00139; P.Lima and L.Morgado acknowledge support from FCT, project POCTI/MAT/45700/2002; L.Morgado also acknowledges support from FCT, through SFRH/BD/31513/2006.

Proposition 1. 1) For any fixed $N, \xi \in \mathbb{R}$, the singular nonlinear BVP (1)–(3) is solvable: it has at least one constant solution

$$\rho(r, \xi) \equiv \rho_\xi = \xi; \tag{4}$$

in addition, the accompanying singular problem (1), (2), considered separately, has yet at least two constant solutions independent of ξ:

$$\rho(r) \equiv \rho_{\rm tr} = 0, \qquad \rho(r) \equiv \rho_- = -1; \tag{5}$$

when $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, there are three constant solutions to Eq.(1), defined by (4) and (5), where $\rho_- < \rho_{\rm tr} < \rho_\xi$, for $\xi > 0$, and $\rho_\xi < \rho_- < \rho_{\rm tr}$, for $\xi < -1$.

2) For fixed $N \geq 2$ and $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, any solution to the singular nonlinear BVP (1)–(3) satisfies the restrictions:

$$-1 < \rho(r, \xi) \leq \xi \quad \forall r \in \mathbb{R}_+, \qquad if \quad \xi > 0, \tag{6}$$

$$\xi \leq \rho(r, \xi) < 0 \qquad \forall r \in \mathbb{R}_+, \qquad if \quad \xi < -1; \tag{7}$$

for $N : 1 < N < 2$, the same is valid with the replacement of the conditions (2) by the conditions

$$|\lim_{r \to 0+} \rho(r)| < \infty, \qquad \lim_{r \to 0+} \rho'(r) = 0. \tag{8}$$

3) For any $N, \xi \in \mathbb{R}$, BVPs (1)–(3) and (1), (8), (3) are invariant with respect to the transformation

$$\rho_{\rm new} = -\rho - 1, \qquad \xi_{\rm new} = -\xi - 1. \tag{9}$$

For integer $N \geq 2$, the operator in the left–hand side of Eq.(1) is the radial part of the N–dimensional Laplace operator relating to the centrally symmetric solutions.

Definition 1. For fixed integer $N \geq 2$ and $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, let $\rho(r, \xi)$ be a monotone solution of BVP (1)–(3), lying in the domain (6) or (7), respectively, and different from (4). For $\xi > 0$, if there exists $R(\xi) > 0$ such that $\rho(R(\xi), \xi) = 0$, then we say that $\rho(r, \xi)$ defines a (hyper)spherical interface (a wall) of a bubble, or simply a bubble with a radius $R_b = R(\xi)$; for $\xi < -1$, if there exists $R(\xi) > 0$ such that $\rho(R(\xi), \xi) = -1$, then we say that $\rho(r, \xi)$ describes a droplet with a radius $R_d = R(\xi)$.

We will use Definition 1 formally for any $N > 1$.

1.1. **Bubbles and Droplets in the Capillary Fluid Models.** Concerning the physical models in this subsection, see, e.g., [6]– [9] and references therein.

In the second gradient theory (or shell–like theory), for nonhomogeneous or two–phase capillary fluids (fluid – fluid, fluid – vapor, fluid – gas, etc.), an additional term, depending on the gradient of density $\nabla\rho$, is added to the classical expression $E_0(\rho)$ for the volume free energy:

$$E(\rho, |\nabla\rho|^2) = E_0(\rho) + \frac{\gamma}{2}|\nabla\rho|^2, \qquad \gamma = \text{const} > 0.$$

Under isothermal process, the action functional

$$J(\rho, \vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\rho\frac{|\vec{v}|^2}{2} - E(\rho, |\nabla\rho|^2)\right] dx^N dt$$

is introduced where $\vec{v}(\vec{r}, t)$ is the vector–velocity of the particles of the medium, $N = 2, 3$. Taking into account that the law of conservation of mass has to be true in any domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (which leads to the equation $\rho_t + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$) and using the D'Alembert–Lagrange principle in order to find a solution of $\delta J = 0$ with the above–mentioned constraint (that implies a complex problem on a conditional extremum), the corresponding vector system of partial differential equations (PDEs), with respect to $\vec{v}(\vec{r}, t)$ and $\rho(\vec{r}, t)$, has been deduced.

For a medium in the equilibrium state, there is one PDE with respect to $\rho(\vec{r})$ which can describe the formation of microscopical bubbles in a nonhomogeneous or two–phase fluid, e.g., vapor inside one liquid. When centrally symmetric solutions are sought, depending on the radial variable r in the polar coordinates in $\mathbb{R}^N$, the physical model leads to the following singular nonlinear BVP:

$$\gamma\left(\rho'' + \frac{N-1}{r}\rho'\right) = \mu(\rho) - \mu(\rho_l), \qquad r \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

$$\lim_{r\to 0+} \rho'(r) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho_l > 0, \tag{11}$$

Here the function $\mu(\rho) = (dE_0/d\rho)(\rho)$ is the chemical potential of the medium, ρ_l is the density of the external liquid. Whenever a strictly increasing solution $\rho(r)$ to the problem (10), (11) exists, for some $\rho(0) = \rho_v$, $0 < \rho_v < \rho_l$, then ρ_v is the density of the gas at the center of the bubble and the solution $\rho(r)$ determines an increasing mass density profile.

For the simplest model, suggested in [1], $\mu(\rho)$ is a third–degree polynomial on ρ with three distinct real roots:

$$\mu(\rho) = 4\alpha(\rho - \wp_1)(\rho - \wp_2)(\rho - \rho_l), \qquad 0 < \wp_1 < \wp_2 < \rho_l, \qquad \alpha > 0.$$

In this case, the qualitative behavior of $\mu(\rho)$ is analogous to the real chemical potentials for the Van der Waals and other fluids near the critical temperature. Introducing the normalized values $\rho_{\mathrm{new}} = (\rho - \wp_2)/(\wp_2 - \wp_1)$, $\lambda = \sqrt{\alpha/\gamma}(\wp_2 - \wp_1) > 0$,

$$\xi = (\rho_l - \wp_2)/(\wp_2 - \wp_1) > 0, \tag{12}$$

and writing ρ instead of ρ_{new}, we obtain the relations: $\rho_v = \rho(0)\,[\wp_2 - \wp_1] + \wp_2$,

$$\widetilde{\mu}(\rho) = \mu(\rho(\wp_2 - \wp_1) + \wp_2)/[\gamma(\wp_2 - \wp_1)] = 4\lambda^2(\rho+1)\rho(\rho - \xi). \tag{13}$$

As a result, we obtain the singular nonlinear BVP (1)–(3) (with more accurate statement of the boundary conditions in the singular points).

If the bubble–type solutions exist, many important physical properties depend on them: the gas density inside the bubble, the bubble radius, surface tension, interface thickness, etc.

Besides the bubbles there are the droplet models when the density of the medium inside the object is higher than outside: $0 < \rho_l < \rho_v$, $0 < \rho_l < \wp_1 < \wp_2$; in this case (12) implies $\xi < -1$.

1.2. **Bubbles in the Models of Nonlinear Field Theory and Cosmology.** A different physical model, described below, is widely studied in the nonlinear field theory and relativistic cosmology where the bubbles can be treated as the classical patterns of the elementary particles or the domains in the universe, respectively (see, e.g., [10], Chapter 12, [11], Chapter 5). In the $(N+1)$–dimensional Minkowski space with the coordinates $x_0 = t, x_1, \ldots, x_N$ $(N \geq 1)$, let us consider the scalar neutral field $\rho(\vec{r}, t)$ with the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)^2 - W(\rho).$$

Here $W(\rho)$ is the Higgs–type self–action potential of the field,

$$W(\rho) = \lambda^2(\rho - w_1)(\rho - w_2)(\rho - \xi)^2, \quad w_{1,2} = [-(\xi+2) \mp \sqrt{2(\xi+2)(1-\xi)}]/3, \tag{14}$$

and, since $w_{1,2}$ must be real, this implies

$$-2 \leq \xi \leq 1. \tag{15}$$

Here and further we use a system of units with $c = \hbar = 1$ where c is the speed of light in vacuum and $\hbar$ is the Plank constant.

The Lagrange–Euler PDE takes the form

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \Delta_{\mathrm{N}}\rho + \frac{dW}{d\rho}(\rho) = 0, \qquad \vec{r} \in \mathbb{R}^N, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

where Δ_{N} is the N–dimensional Laplace operator and $dW/d\rho$ coincides with the right–hand side of Eq.(13). If $\rho(\vec{r}, t)$ is a solution of Eq.(16) for $t \geq t_0$ and $E(t_0) = E_0 < \infty$, where

$$E(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 + |\nabla\rho|^2/2 + W(\rho)\right] d^N x$$

is the energy integral, then $E(t) \equiv E_0$, $t \geq t_0$.

Definition 2. Let $\rho \equiv \rho_{vm}$ be a constant solution of Eq.(16), so that $(dW/d\rho)(\rho_{vm}) = 0$. We say that ρ_{vm} is a true vacuum of the field iff it is a point of absolute minimum of $W(\rho)$, otherwise it is a false vacuum.

For Eq.(16), if we look for a (hyper)bubble as a stationary centrally symmetric solution with a finite energy, then we obtain again the nonlinear singular BVP (1)–(3) (here the bubbles are called sphalerons). Moreover, from (15) and Definition 1, we have two admissible intervals for the values of ξ:

$$0 < \xi < 1; \tag{17}$$

$$-2 < \xi < -1. \tag{18}$$

The well–known mechanistic interpretation of the model is the following (in detail, see [10], Chapter 12). Due to the substitution (9), we can consider only the case (17) when the formulas (14) determine the Higgs–type potential $W(\rho)$ with two distorted vacua $\rho_- = -1$ and $\rho_\xi = \xi$ (a true vacuum and a false one, respectively). Let us interpret r as the time variable and ρ as a "coordinate" and introduce the potential $\widetilde{W}(\rho) \equiv -W(\rho)$ and the force $\widetilde{F}(\rho, \xi) = -(d\widetilde{W}/d\rho)(\rho, \xi)$. Then we can rewrite Eq.(1) in the form

$$\rho'' + (N-1)\rho'/r = \widetilde{F}(\rho, \xi), \quad r > 0, \tag{19}$$

and we can treat Eq.(19) as the second Newton law for a "point mass" (a unit mass "ball") in the field of potential forces where the term $(N-1)\rho'/r$ plays the role of depending on time friction. When $N > 1$, due to the friction term, we obtain the restriction (17) as a necessary condition for a bubble–type solution to exist.

Remark 1. For $\xi = 1$, we obtain from (14) the Higgs potential

$$W(\rho) = W_H(\rho) = \lambda^2(\rho^2 - 1)^2 \tag{20}$$

with two degenerate true vacua $\rho_\pm = \pm 1$. Eq.(16) with the Higgs potential (20) has the exact one–dimensional solutions which are called the domain walls. In general, they move with constant velocity v, $0 < v < 1$, perpendicular to their surface: $\rho_{w\pm}(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0, \vec{n}, v) = \pm \tanh\left(\lambda\sqrt{2}\,[(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) \pm v(t - t_0)]\,/\sqrt{1 - v^2}\right)$, where $\vec{n}$ is the unit vector of the direction of wave propagation; the stationary solutions correspond to $v = 0$. The bubbles can be treated approximately as curved domain walls. However it is well known that Eq.(16) with the potential (20) has no stationary N–dimensional bubble–type solutions for $N \geq 2$ (concerning dynamical problems for the bubble–type solutions to Eq.(16), some results were obtained in [12], [13], for $N = 3$ and $\xi = 1$).

2. Associated singular nonlinear Cauchy problems

Definition 3. We say that the singular nonlinear BVP (1)–(3) is correctly formulated on $\mathbb{R}_+$ iff both the local singular problem (1), (2) at the point $r = 0$ and the singular CP (1), (3) at infinity have one–parameter sets of solutions.

Further, we use the classification of singular points for linear and nonlinear ODEs according to [14].

2.1. **The regular singularity at zero.**

Eq.(1) has a regular singularity as $r \to 0$ and the limit conditions (2) are equivalent to the following ones (with unknown parameter ρ_0):

$$\lim_{r \to 0+} \rho(r) = \rho_0, \qquad \lim_{r \to 0+} r\rho'(r) = 0. \tag{21}$$

For the linearized CP in the neighborhood of $r = 0$, characteristic exponents are $\nu_1 = 0$ and $\nu_2 = 2 - N$. Then, from Theorem 5 in [15] and the results of Section 30 in [16], the following assertion is valid.

Proposition 2. For any fixed $N \geq 2$ and $\xi, \rho_0 \in \mathbb{R}$, the singular nonlinear CP (1), (21) has a unique solution $\rho(r, \rho_0)$ in the class $C[0, r_0] \bigcap C^1(0, r_0]$, for some $r_0 > 0$. This solution is a holomorphic function at the point $r = 0$ represented by the series

$$\rho(r, \rho_0) = \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k}(\rho_0) r^{2k}, \qquad 0 \leq r \leq r_0, \tag{22}$$

where the coefficients ρ_{2k}, depending on the parameter ρ_0, are determined by the recurrence formulas:

$$\rho_2(\rho_0) = (2\lambda^2/N)\, \rho_0(\rho_0 + 1)(\rho_0 - \xi), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \rho_{2k}(\rho_0) = \left\{ \sum_{m=0}^{k-1} \left[\rho_{2k-2m-2} \left(\sum_{l=0}^{m} \rho_{2l}\rho_{2m-2l} + (1-\xi)\rho_{2m} \right) \right] - \xi\rho_{2k-2} \right\} \times \\ \times 2\lambda^2/[k(2k+N-2)], \qquad k = 2, 3, \ldots . \end{gathered} \tag{24}$$

For $N : 1 < N < 2$, the formulas (22)–(24) define also the solution to the singular nonlinear CP (1), (21) but which is unique only in the class $H[-r_0, r_0]$ of the holomorphic functions at the point $r = 0$; however, as a solution to Eq.(1) satisfying the conditions

$$\lim_{r \to 0+} \rho(r) = \rho_0, \qquad \lim_{r \to 0+} \rho'(r) = 0, \tag{25}$$

it is unique in the class $C^1[0, r_0]$.

Corollary 1. *For any fixed $N > 1$ and $\xi \in \mathbb{R}$, the local singular problem* (1), (2) *has a one–parameter set of solutions $\rho(r, \rho_0)$. Each solution of this set is a holomorphic function, at the point $r = 0$, represented by the series* (22)–(24)*, so that it satisfies conditions* (8) *(three constant solutions, defined by* (4) *and* (5)*, belong to this set and correspond to the values of ρ_0 equal ξ, 0 or -1, respectively).*

Taking into account Propositions 1, 2 and Definition 1, we can deduce the following necessary condition.

Corollary 2. *For fixed $N > 1$ and $\xi : \xi(\xi + 1) > 0$, let $\rho_0 = \rho_0(\xi)$ be such that the function $\rho(r, \xi) = \rho(r, \rho_0(\xi))$ from the set* (22)–(24)*, being extended to the right, is a bubble–type, for $\xi > 0$ (resp., a droplet–type, for $\xi < -1$), solution to the singular nonlinear BVP* (1)–(3)*. Then $\rho_0(\xi)$ satisfies the condition*

$$-1 < \rho_0(\xi) < 0. \tag{26}$$

Moreover, for the corresponding solution $\rho(r, \xi)$ satisfying the restrictions (6) *(resp.,* (7)*), the conditions* (2) *and* (8) *are equivalent and $\rho''(0, \xi) > 0$ (resp., $\rho''(0, \xi) < 0$).*

Remark 2. For any fixed $N > 1$ and $\xi \in \mathbb{R}$, depending on the choice of $\rho_0(\xi) \in \mathbb{R}$, the solutions of the singular nonlinear CP (1), (21) have different behavior: there are the singular blow–up, bounded monotone and oscillating solutions. The needed bubble–type or droplet–type solution, i.e., existing globally and satisfying (3), separates the set of blow–up solutions from the set of oscillating ones and is called a separatrix solution (for a detailed analysis, see [5]; it follows also from the mechanistic interpretation of the model).

2.2. **The irregular singularity at infinity.** Eq.(1) has an irregular singularity as $r \to \infty$. Due to the classical results of [16] with their detailing in [17] and some results of [15], concerning the singular CPs, we obtain

Proposition 3. For any fixed $N \in \mathbb{R}$ and $\xi : \xi(\xi + 1) > 0$, the singular nonlinear CP at infinity (1), (3) has a one–parameter family of solutions. For $N = 1$, this family is represented by a convergent exponential Lyapunov series

$$\rho(r, b) = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} B_k b^k \exp(-k\varkappa r), \qquad r \geq r_\infty, \tag{27}$$

where b is a parameter, $|b \exp(-\varkappa r_\infty)|$ is small,

$$\varkappa = 2\lambda\sqrt{\xi(\xi + 1)} > 0, \tag{28}$$

and the independent of b constants B_k are defined by the recurrent formulas:

$$B_1 = 1, \qquad B_2 = (1+2\xi)/[3\xi(1+\xi)], \tag{29}$$

$$B_k = \left[(1+2\xi)\sum_{l=1}^{k-1} B_l B_{k-l} + \sum_{m=2}^{k-1}\sum_{l=1}^{m-1} B_l B_{k-m} B_{m-l}\right] \Big/ \\ \Big/ [(k^2-1)\xi(\xi+1)], \qquad k = 3, 4, \ldots, \tag{30}$$

For $N \neq 1$, the one–parameter family of solutions to the singular nonlinear CP (1), (3) is represented by a convergent exponential Lyapunov series

$$\rho(r,b) = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(r) b^k r^{-k(N-1)/2} \exp(-k\varkappa r), \qquad r \geq r_\infty, \tag{31}$$

where b is a parameter, $|br_\infty^{-(N-1)/2}\exp(-\varkappa r_\infty)|$ is small, $\varkappa$ is defined by (28) and the independent of b coefficient functions $C_k(r)$ are the solutions to the recurrent sequence of singular linear CPs:

$$C_1'' - 2\varkappa C_1' - (N-1)(N-3)C_1/(4r^2) = 0, \qquad r \geq r_\infty, \\ \lim_{r\to\infty} C_1(r) = 1, \qquad \lim_{r\to\infty} C_1'(r) = 0; \tag{32}$$

$$C_2'' - [4\varkappa + (N-1)/r]C_2' + [3\varkappa^2 + (N-1)(2\varkappa/r + 1/r^2)]C_2 = 4\lambda^2(2\xi+1)C_1^2, \ r \geq r_\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} C_2(r) = B_2, \qquad \lim_{r\to\infty} C_2'(r) = 0;$$

$$C_k'' - [2k\varkappa + (k-1)(N-1)/r]C_k' + \{(k^2-1)\varkappa^2 + (N-1)[k(k-1)\varkappa/r +$$

$$+((k^2-2k)(N-1)+2k)/(4r^2)]\}C_k =$$

$$= 4\lambda^2\left[(2\xi+1)\sum_{l=1}^{k-1} C_l C_{k-l} + \sum_{m=2}^{k-1}\sum_{l=1}^{m-1} C_l C_{k-m} C_{m-l}\right], \qquad r \geq r_\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} C_k(r) = B_k, \qquad \lim_{r\to\infty} C_k'(r) = 0, \qquad k = 3, 4, \ldots,$$

where B_k are defined by (29), (30). Each coefficient function $C_k(r)$ is defined uniquely, by recurrence, and, for large values of r, is represented in the form of an asymptotic series in negative powers of r:

$$C_k(r) \sim B_k + \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)}/r^s, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

where the coefficients $c_s^{(k)}$ may be defined by the substitution of (33) in the above equations for $C_k(r)$. In particular, for $k = 1$, the following formulas are valid from (32):

$$c_1^{(1)} = (N-1)(N-3)/(8\varkappa), \qquad c_{s+1}^{(1)} = c_s^{(1)}[-s(s+1) + (N-1)(N-3)/4]/[2\varkappa(s+1)],$$

$s = 1, 2 \ldots$. (The constant solution (4) belongs to the family (31) with $b = 0$.)

The next necessary condition follows from Propositions 1, 3 and Definition 1.

Corollary 3. *For fixed $N \in \mathbb{R}$ and $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, let $b = b(\xi)$ be such that the function $\rho(r,\xi) = \rho(r, b(\xi))$ from the set* (31)*, being extended to the left, is a bubble–type, for $\xi > 0$, or a droplet–type, for $\xi < -1$, solution to the singular nonlinear BVP* (1)*–*(3)*. Then $b(\xi)$ satisfies the conditions:*

$$b(\xi) < 0, \quad \textit{if} \quad \xi > 0; \qquad b(\xi) > 0, \quad \textit{if} \quad \xi < -1.$$

2.3. **Correct statement of the singular nonlinear BVP: restrictions on the parameters.** From Corollary 1, Proposition 3 and Definition 3, we obtain

Corollary 4. *For any fixed $\xi : \xi(\xi+1) > 0$ and $N \geq 2$, the nonlinear singular BVP* (1)*–*(3) *is correctly formulated on $\mathbb{R}_+$ and is equivalent to the singular nonlinear BVP* (1), (8), (3)*; for $N : 1 < N < 2$, the same is valid with the a priori requirement that a solution to the BVP* (1)*–*(3) *is a holomorphic function at the point $r = 0$.*

Then to solve the original nonlinear singular BVP (1)–(3) with fixed $N > 1$ and $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, we must find from the set (31) a particular solution of Eq.(1) which also satisfies (2), i.e., belongs to the family (22)–(24). Alternatively, we can look for a particular solution of the set (22)–(24) which additionally fulfills (3), i.e., belongs to the family (31).

3. Analytic stable initial manifolds and the boundary condition transfer

In this section, we use the idea of the boundary condition transfer from infinity to a finite point in order to get the equivalent nonlinear BVP on a finite interval (in general, with a variable right boundary), which has both theoretical and practical interest. For a history of the problem and the initial concepts of the boundary condition transfer from the singular points of ODE systems, see, e.g., the survey [18]. Some existence theorems about the differential and analytic SIMs, for nonlinear ODEs, can be found in [19], Chapter XIII. In what follows, we use the results of [20] taking into account as well the more general results of [21]–[23] to describe SIMs for nonlinear ODE systems. (For $N = 1$, we have a simpler autonomous ODE and the corresponding assertions can be obtained by different ways.)

Proposition 4. For $N = 1$ and any fixed $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, the values of solutions to the singular nonlinear CP (1), (3) (i.e., belonging to the family (27)) form in the phase plane of the variables (ρ, ρ'), in the neighborhood of the point $(\xi, 0)$, a one–dimensional SIM invariant with respect to r. This analytic curve, as the Lyapunov manifold of conventional stability, is given by the relation

$$\rho' = -\varkappa(\rho-\xi) + \beta(\rho-\xi), \qquad |\rho-\xi| \le \Delta, \qquad \Delta > 0, \tag{34}$$

where $\varkappa$ is given by (28) and $\beta(z)$ is a solution to the singular nonlinear Lyapunov–type problem,

$$\frac{d\beta}{dz}\Big(-\varkappa z + \beta\Big) = \varkappa\beta + 4\lambda^2 z^2(2\xi+1+z), \qquad |z| \le \Delta, \qquad \Delta > 0,$$

$$\beta(0) = \frac{d\beta}{dz}(0) = 0;$$

this problem has a unique solution in the class $C^1[-\Delta, \Delta]$ and it is a holomorphic function at the point $z = 0$:

$$\begin{gathered}\beta(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k z^k, \quad |z| \le \Delta,\\ \beta_2 = -4\lambda^2(2\xi+1)/(3\varkappa), \qquad \beta_3 = (\beta_2^2 - 2\lambda^2)/(2\varkappa),\\ \beta_k = \Big(\textstyle\sum_{m=2}^{k-1} m\beta_m\beta_{k+1-m}\Big)\Big/[\varkappa(k+1)], \qquad k = 4, 5, \ldots;\end{gathered} \tag{35}$$

this solution is represented in the explicit form

$$\beta(z) = \varkappa z\left(1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2(2\xi+1)z/(3\varkappa^2) + 2\lambda^2 z^2/\varkappa^2}\right),$$

for all $|z| \le \Delta$ such that this formula makes sense. Thus Eq.(34) can be rewritten in the explicit form

$$\rho' = -\varkappa(\rho-\xi)\sqrt{1 + 8\lambda^2(2\xi+1)(\rho-\xi)/(3\varkappa^2) + 2\lambda^2(\rho-\xi)^2/\varkappa^2}, \qquad |\rho-\xi| \le \Delta. \tag{36}$$

Remark 3. For $\xi = \pm 1$, replacing $\varkappa$ in (36) by $\mathrm{sign}(\xi)\varkappa$, we obtain the whole Lagrange manifold generated in the phase plane by the values of the exact one–dimensional solutions $\rho_{w_\pm}(r - r^0) = \pm\tanh\left(\lambda\sqrt{2}\,(r-r^0)\right)$, $r, r^0 \in \mathbb{R}$ (see Remark 1 concerning the planar domain walls).

Proposition 5. For any fixed $N : (N \in \mathbb{R}) \bigwedge (N \ne 1)$ and $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, the values of solutions to the singular nonlinear CP (1), (3) (i.e., belonging to the family (31)) form in the phase plane of the variables (ρ, ρ'), in the neighborhood of the point $(\xi, 0)$, a one–dimensional SIM depending on r as on parameter. This analytic curve, as the Lyapunov manifold of conventional stability, is given by the relation

$$\rho' = -\varkappa(\rho-\xi) + \alpha(r, \rho-\xi), \qquad r \ge r_\infty, \qquad |\rho-\xi| \le \Delta, \qquad \Delta > 0, \tag{37}$$

where $\varkappa$ is given by (28). Here $\alpha(r,z)$ is analytic function at the point $z = 0$, for each $r \ge r_\infty$, $\alpha(r, 0) \equiv 0$, and is a unique solution, in this class, to the singular nonlinear CP at infinity:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\Big(-\varkappa z + \alpha\Big) = \varkappa\alpha - \frac{N-1}{r}\Big(\alpha - \varkappa z\Big) + 4\lambda^2 z^2(2\xi+1+z), \ |z| \le \Delta, \ r \ge r_\infty, \tag{38}$$

$$\lim_{r\to\infty} \alpha(r,z) = \beta(z) \quad \text{uniformly on} \quad z : |z| \le \Delta, \tag{39}$$

where $\beta(z)$ is defined by Proposition 4. For large enough values of r and small enough $|z|$, this solution may be represented in two equivalent forms:

$$\alpha(r,z) \sim \beta(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(z)/r^k, \qquad |z| \le \Delta, \qquad r \ge r_\infty,$$

$$\alpha(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_k(r) z^k, \qquad |z| \le \Delta, \qquad r \ge r_\infty.$$

Here the coefficient functions $\alpha_k(z)$ are holomorphic at the point $z = 0$ solutions to a recurrent sequence of singular linear Lyapunov–type problems whereas $\widetilde{\alpha}_k(r)$ are the solutions to a recurrent sequence of singular CPs at infinity (for a Riccati–type ODE, when $k = 1$, and for linear ODEs, when $k \ge 2$) which, for large enough values of r, have asymptotic expansions on integer negative powers of r. As a result, the expansion of the form

$$\alpha(r,z) \sim \sum_{k=1,\ m=0,\ k+m\ge 2}^{\infty} \alpha_{k,m} z^k/r^m, \qquad |z| \le \Delta, \qquad r \ge r_\infty, \tag{40}$$

is valid where the coefficients $\alpha_{k,m}$ are defined by the formal substitution of (40) in Eq.(38), $\alpha_{k,0} = \beta_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$ where β_k are defined by (35).

In more detail, for $\alpha_k(z)$ we obtain the singular linear Lyapunov–type problems:

$$\frac{d\alpha_1}{dz}\Big(-\varkappa z + \beta(z)\Big) = \Big[\varkappa - \frac{d\beta}{dz}(z)\Big]\alpha_1 + (N-1)[\varkappa z - \beta(z)], \quad |z| \le \Delta, \quad \alpha_1(0) = 0;$$

$$\frac{d\alpha_{k+1}}{dz}\Big(-\varkappa z + \beta(z)\Big) = \left[\varkappa - \frac{d\beta}{dz}(z)\right]\alpha_{k+1} + k\alpha_k - \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \frac{d\alpha_{k-l+1}}{dz} +$$
$$+(N-1)[\varkappa z - \beta(z) - \alpha_k], \qquad |z| \le \Delta, \qquad \alpha_{k+1}(0) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Alternatively, for $\widetilde{\alpha}_k(r)$ we have the singular CPs at infinity:

$$\widetilde{\alpha}_1' - [2\varkappa - (N-1)/r]\widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\alpha}_1^2 = (N-1)\varkappa/r, \quad r \ge r_\infty, \quad \lim_{r\to\infty} \widetilde{\alpha}_1(r) = 0; \tag{41}$$

$$\widetilde{\alpha}_k' - [(k+1)\varkappa - (N-1)/r]\widetilde{\alpha}_k + \sum_{m=1}^{k} m\widetilde{\alpha}_m \widetilde{\alpha}_{k+1-m} = 4\lambda^2[\delta_{k,2}(2\xi+1) + \delta_{k,3}], \quad r \ge r_\infty,$$
$$\lim_{r\to\infty} \widetilde{\alpha}_k(r) = \beta_k, \qquad k = 2, 3, \ldots,$$

where β_k are defined by the formulas (35), $\delta_{k,j}$ is the Kronecker delta.

All these problems are uniquely solvable by recurrence and their solutions are represented by the expansions indicated above. For example, for the solution to the singular CP (41), for large enough r, we obtain:

$$\widetilde{\alpha}_1(r) \sim \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{1,s}/r^s, \qquad \alpha_{1,1} = -(N-1)/2, \tag{42}$$

$$\alpha_{1,s} = \left[(N-s)\alpha_{1,s-1} + \sum_{m=1}^{s-1} \alpha_{1,m}\alpha_{1,s-m}\right] \Big/ (2\varkappa), \quad s = 2, 3, \ldots. \tag{43}$$

Corollary 5. *For fixed $N \in \mathbb{R}$ and $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, let $\rho(r,\xi)$ be a solution to the singular nonlinear CP* (1), (3), *i.e., belonging to the set* (31). *Then the values of $\rho(r,\xi)$ belong to the SIM* (37) *for all $r \ge r_\infty$. It means that the limit boundary conditions* (3) *at infinity for the solutions to Eq.*(1) *are equivalent, for large enough r and small enough $|\rho - \xi|$, to the nonlinear relation* (37) *(for $N = 1$, it is the same as the relation* (34) *which is equivalent to* (36)*) where $\varkappa$ is defined by* (28) *and $\alpha(\rho - \xi)$ is described by Proposition 5.*

Remark 4. Corollary 5 and Proposition 5 give us the algorithm for replacement of the limit boundary conditions (3) at infinity by the equivalent nonlinear relation (37) taken in a finite point $r = r_\infty$ (nonlinear boundary condition of the third kind). For any fixed $N \in \mathbb{R}$ and $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, the following approximations to SIM (37) are valid: for autonomous approach, coinciding with the case $N = 1$, equation of SIM has the explicit form (36); for a linear approach, we have the relation

$$\rho' = [-\varkappa + \widetilde{\alpha}_1(r)](\rho - \xi), \tag{44}$$

which defines a tangent to the SIM (37) taken in the limit stationary point $(\xi, 0)$ and depending on r as on parameter. For large enough r, $\widetilde{\alpha}_1(r)$ can be defined approximately by the asymptotic expansion (42), (43) (for $N = 1$, $\widetilde{\alpha}_1(r) \equiv 0$).

4. Restrictions on the parameters as the necessary and sufficient conditions for the solutions to exist

4.1. **The necessary conditions.** First, we use the known variational approach of [24].

Eq.(1.1) may be considered as the Lagrange–Euler equation for the functional

$$J(\rho) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 + W(\rho) \right) r^{N-1} dr, \tag{45}$$

where $W(\rho)$ is defined by (14) which is equivalent to $W(\rho) = 4\lambda^2 \int_\xi^\rho (s+1)s(s-\xi)ds$. The functional $J(\rho)$ is considered on the class of functions for which the integral (45) converges.

Let $\rho(r)$ be a nonconstant solution of Eq.(1), for which the integral (45) converges, and $\rho_\sigma(r) = \rho(\sigma r)$ where σ is a positive parameter ($\rho_1 \equiv \rho$). Then we obtain

$$\Im(\sigma) = J(\rho_\sigma) = J_1(\rho)/\sigma^{N-2} + J_2(\rho)/\sigma^N, \tag{46}$$

where $J_j(\rho)$ $(j = 1, 2)$ are independent of σ:

$$J_1(\rho) = \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 r^{N-1} dr, \qquad J_2(\rho) = \int_0^\infty W(\rho) r^{N-1} dr.$$

Differentiating (46) with respect to σ, we obtain

$$\frac{d\Im}{d\sigma}(\sigma) = -(N-2)J_1(\rho)/\sigma^{N-1} - NJ_2(\rho)/\sigma^{N+1}. \tag{47}$$

Taking into account that the function $\rho(r)$, corresponding to the value $\sigma = 1$, is the solution of variational problem, we must put $(d\Im/d\sigma)_{\sigma=1} = 0$. Then (47) implies

$$J_2(\rho) = -[(N-2)/N] J_1(\rho) \tag{48}$$

(according to [25], the similar relations are associated both with G.H.Derrick and the other names; for some more general problems, it is known also as the Pokhozhaev identity).

For a nonconstant solution, J_1 is positive; if $W(\rho) \geq 0 \ \forall \rho \in \mathbb{R}$ then J_2 is positive as well and, for any $N \geq 2$, (48) is not satisfied. Hence the existence of at least one nonconstant solution requires that $W(\rho) < 0$, for a certain range of values of ρ, that implies from (14) the restriction

$$-2 < \xi < 1. \tag{49}$$

Concerning the singular nonlinear BVP (1), (8), (3) with $N > 1$, there is a simpler way leading to the same necessary condition for the existence of a nonconstant solution. Namely, let $\rho(r, \xi)$ be a nonconstant solution of the above BVP for which the integral

$$I = \int_0^\infty \frac{(\rho'(s,\xi))^2}{s} ds \tag{50}$$

converges. Then, multiplying Eq.(1) by ρ' and integrating between zero and r, we obtain

$$\frac{(\rho'(r,\xi))^2}{2} + (N-1) \int_0^r \frac{(\rho'(s,\xi))^2}{s} ds = W(\rho(r,\xi)) - W(\rho_0(\xi)),$$

where $\rho_0(\xi) = \rho(0, \xi)$; in particular for $r \to \infty$ we get

$$(N-1) \int_0^\infty \frac{(\rho'(s,\xi))^2}{s} ds = -W(\rho_0(\xi)). \tag{51}$$

Due to (51), we conclude that the value $W(\rho_0(\xi))$ must be negative, for any $N > 1$, that implies the restriction (49) once again.

As a result, taking into account also Propositions 2, 3 and Corollaries 1, 4, we obtain

Proposition 6. For each fixed $N \geq 2$, the restriction (49) is the necessary condition for the existence of a nonconstant solution to Eq.(1), for which the integral (45) converges. Concerning the singular nonlinear BVP (1), (8), (3) with $N > 1$, the same restriction (49) is the necessary condition for the existence of a nonconstant solution, for which the integral (50) converges; under condition $\xi(\xi+1) > 0$, connected with the correct statement of the above BVP, the restriction (17) (resp., (18)) is the necessary condition for a bubble–type (resp., a droplet–type) solution to exist.

Proposition 6, Corollary 2 and the formula (51) (in the same way as the mechanistic interpretation of the models) lead to more exact estimates for $\rho_0(\xi) = \rho(0, \xi)$ than (26).

Corollary 6. *For any fixed* $N > 1$ *and* $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, *let* $\rho_0(\xi)$ *be such that the solution* $\rho(r, \xi) = \rho(r, \rho_0(\xi))$ *of the singular nonlinear CP* (1), (25), *being extended to the right, is a bubble–type, for* $\xi > 0$, *or a droplet–type, for* $\xi < -1$, *solution to the singular nonlinear BVP* (1), (8), (3). *Then* $\rho_0(\xi)$ *satisfies the restrictions:*

$$-1 < \rho_0(\xi) \leq w_2(\xi) = [-(\xi+2) + \sqrt{2(\xi+2)(1-\xi)}]/3 < 0, \quad \textit{if} \quad 0 < \xi < 1; \tag{52}$$

$$-1 < w_1(\xi) = [-(\xi+2) - \sqrt{2(\xi+2)(1-\xi)}]/3 \leq \rho_0(\xi) < 0, \quad \textit{if} \quad -2 < \xi < -1. \tag{53}$$

4.2. **The sufficient conditions.** For the singular nonlinear BVP (1), (8), (3) with $N > 1$ and $\xi : \xi(\xi+1) > 0$, the restrictions (17), (18) on the parameter ξ are not only necessary, but also sufficient conditions for the existence of a bubble–type or droplet–type solution. It follows both from the mechanistic interpretation of the model and some results relating to the so–called ground state problem applicable to the above BVP (see, e.g., [26] and references therein).

In [26], as a special case, the authors search for a nonnegative solution on $\mathbb{R}_+$ (ground state) to the following singular nonlinear BVP with $N > 1$:

$$u'' + [(N-1)/r]u' + f(u) = 0, \qquad r \in \mathbb{R}_+, \tag{54}$$

$$\lim_{r\to 0+} u(r) = \alpha > 0, \qquad \lim_{r\to 0+} u'(r) = 0, \tag{55}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r) = \lim_{r\to\infty} u'(r) = 0. \tag{56}$$

Here $f(u)$ is a locally Lipschitz continuous on $[0, \infty)$ function and $f(0) = 0$. Then in particular the following assertion is valid (see, e.g., Theorem 2 in [15]): for any fixed $N > 1$ and $\alpha \in \mathbb{R}_+$, the singular nonlinear CP (54), (55) has a unique solution, at least on some interval $0 < r \leq r_0(\alpha)$, $r_0(\alpha) > 0$.

Let us introduce the function

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt, \tag{57}$$

which is continuous on $[0, \infty)$ and $F(0) = 0$.

The formulated below assertion follows from some more general results of [26] (see Theorem 1 and Lemma 2.1 therein).

Theorem. *Let the following conditions be fulfilled: (i)* $f(u)$ *is a locally Lipschitz continuous on* $[0, \infty)$ *function and* $f(0) = 0$*; (ii) for the function* (57), *there exists* $\beta > 0$ *such that* $F(s) < 0$ *for* $0 < s < \beta$, $F(\beta) = 0$ *and* $f(\beta) > 0$*; (iii) there is a finite value* $\gamma > \beta$ *such that* $\gamma = \min\{s > \beta : f(s) = 0\}$. *Then, for each fixed* $N > 1$, *there exists* $\alpha \in [\beta, \gamma)$ *such that the solution to the singular nonlinear CP* (54), (55) *is continuable on* $\mathbb{R}_+$ *monotone increasing function satisfying the conditions* (56), *i.e., there exists a nonnegative monotone solution to the singular nonlinear BVP* (54)–(56).

For $\xi > 0$, introducing the variable substitution $\rho = \xi - u$, we obtain, from (1), (25), (3), the singular nonlinear BVP (54)–(56) where $f(u) = 4\lambda^2 u(\xi - u)(u - \xi - 1)$, $\alpha = \xi - \rho_0 > 0$ (due to (26), $\xi < \alpha < 1 + \xi$).

Then we have: $f(0) = f(\xi) = f(\xi+1) = 0$; $f(u) < 0\ \forall u \in (0, \xi)$; $f(u) > 0\ \forall u \in (\xi, \xi+1)$; $f(u) \to -\infty$ as $u \to \infty$. Moreover, for the function (57), we obtain $F(s) = -\lambda^2 s^2(s - s_1)(s - s_2)$, where $s_{1,2}(\xi) = \xi - w_{2,1}(\xi)$ (for $w_{1,2}(\xi)$, see (14)). Then, if the restriction (17) is valid, we have: $F(0) = F(s_1) = F(s_2) = 0$; $F(s) < 0\ \forall s \in (0, s_1)$; $F(s) > 0\ \forall s \in (s_1, s_2)$; $F(s) \to -\infty$ as $s \to \infty$.

As a result we obtain that the hypotheses of the above Theorem are satisfied where $\beta = s_1(\xi) = \xi - w_2(\xi)$ $(\xi < \beta < 1 + \xi)$, $\gamma = \min\{s > \beta : f(s) = 0\} = \xi + 1$, and the condition $\alpha \in [\beta, \gamma)$ implies the same restrictions on $\rho_0(\xi)$ as (52).

Using Corollary 4, the properties of substitution (9) and the above Theorem, due to [26], we finally obtain

Proposition 7. For the singular nonlinear BVP (1), (8), (3) with $N > 1$, the restriction (17) (resp., (18)) is the sufficient condition for a bubble–type (resp., a droplet–type) solution to exist, and if $\rho(r, \xi)$ is the above solution then the estimate (52) (resp., (53)) is valid where $\rho_0(\xi) = \rho(0, \xi)$.

5. Conclusions

We have described two different nonlinear physics models leading to the singular nonlinear BVP (1)–(3) and have presented very briefly some results concerning the mathematical analysis of this BVP. In particular, we have obtained the theoretical background for its numerical solution by efficient shooting methods (see [1], [5]). From the mathematical point of view, the problem under consideration is interesting by itself as an example of a singular nonlinear BVP which can be investigated in detail, both analytically and numerically.

A more complete analytical–numerical investigation of the problem will be presented in [5]. The comparative analysis for the computed physical magnitudes in [1] and [5] confirms their qualitative accordance with the expected results for the bubble and droplet models in hydromechanics and nonlinear field theory.

As a future work, it would be interesting to consider the modifications of Eq.(1) for the cases of Van der Waals and other types of fluids; the corresponding dynamical problems are more difficult, especially when nonlinear vector systems of PDEs are considered in hydromechanics (in the case of the scalar PDE (16), the dynamics of the bubbles have been investigated numerically in [12], [13], for $N = 3$ and $\xi = 1$).

References

[1] Lima, P.M., Konyukhova, N.B., Sukov, A.I. and Chemetov, N.V. *Analytical–Numerical Investigation of Bubble–Type Solutions of Nonlinear Singular Problems*// J. Comput. Appl. Math. (Elsevier Science). – 2006. – V.189. – P.260–273.

[2] Lima, P.M., Konyukhova, N.B., Sukov, A.I. and Chemetov, N.V. *Mathematical Analysis and Numerical Solution of a Singular Problem in Nonlinear Physics*// Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta im. N.I.Lobachevskogo (ser. Mathematical Modelling and Optimal Control). – 2005. –V.1. – P.162–170.

[3] Lima, P., Chemetov, N., Konyukhova, N.B. and Sukov, A.I. *Analytical–Numerical Approach to a Singular Boundary Value Problem*// Preprint 20/2003. Lisboa: Departamento de Matematica, Instituto Superior Técnico, October 2003. – 13p.

[4] Lima, P., Chemetov, N., Konyukhova, N.B. and Sukov, A.I. *Analytical–Numerical Approach to a Singular Boundary Value Problem*// Proc. of XXIV Iberian Latin–American Congress on Comput. Methods in Engineering (CILAMCE XXIV; Ouro Preto, Brazil, October 29–31, 2003). Ouro Preto/MG – Brazil, 2003. – 13 p. (CD-ROM).

[5] Konyukhova, N.B., Lima, P.M., Morgado, M.L. and Soloviev, M.B. *Bubbles and Droplets in Nonlinear Physics Models: Analysis and Numerical Simulation of Singular Nonlinear Boundary Value Problem*//Zh. Vychisl. Matem. i Matem Fiz. (in preparation).

[6] Dell'Isola, F., Gouin, H. and Seppecher P. *Radius and Surface Tension of Microscopic Bubbles by Second Gradient Theory*// C.R.Acad. Sci. Paris. –1995. – V.320(Serie IIb). – P.211–216.

[7] Dell'Isola, F., Gouin, H. and Rotoli, G. *Nucleation of Spherical Shell–Like Interfaces by Second Gradient Theory: Numerical Simulations*//Eur. J. Mech. B/Fluids. – 1996. – V.15. – P.545–568.

[8] Gavrilyuk, S.L. and Shugrin, S.M. *Media with Equations of State that Depend on Derivatives*// Prikl. Mekhan. i Tekhn. Fiz. – 1996. – V.37. – P.35–49 [J. Appl. Mech. and Tech. Phys.– 1996. – V.37. – P.177–189].

[9] Gouin, H. and Rotoli, G. *An Analytical Approximation of Density Profile and Surface Tension of Microscopic Bubbles for Van der Waals Fluids*// Mechanics Research Communications. – 1997.– V.24. – P.255–260.

[10] Rubakov V.A. *Classical Gauge Fields*//Editorial URSS, Moscow, 1999 [in Russian].

[11] Linde, A.P. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*// Harwood Academic, Chur, Switzerland, 1990; Nauka, Moscow, 1991 [in Russian].

[12] Voronov, N.A., Kobzarev, I.Yu. and Konyukhova, N.B. *On Possibility of the Existence of New Type Mesons*// Pis'ma v ZhETF. – 1975. – V.22. – P.590–594 [JETP Lett. – 1975. – V.22.– P.290–294].

[13] Belova, T.I., Voronov, N.A., Kobzarev, I.Yu. and Konyukhova, N.B. *Particle–Like Solutions of the Scalar Higgs Equation*// Zh. Exper. Teor. Fiz. – 1977. – V.73. – P.1611–1622 [Sov.Phys. JETP. – 1977. – V.46. – P.846–852].

[14] Wasov, W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*// Wiley, New York, 1965.

[15] Konyukhova, N.B. *Singular Cauchy Problems for Systems of Ordinary Differential Equations*// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1983. – V.23. – P.629–645 [U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1983. – V.23. – P.72–82].

[16] Lyapunov, A.M. *The General Problem of Motion Stability*// GITTL, Moscow, 1950 [in Russian].

[17] Konyukhova, N.B. *On the Behavior Inside and Outside of Stable Manifold for Certain Two–Dimensional Nonlinear Systems of Ordinary Differential Equations*// Matem. Zametki. – 1970. – V.8. – P.285–295 [Math. Notes. – 1970. – V.8. – P.632–638].

[18] Abramov, A.A., Konyukhova, N.B and Balla, K. *Stable Initial Manifolds and Singular Boundary Value Problems for Systems of Ordinary Differential Equations*// Comput. Math. Banach Center Publs. – 1984. – V.13. – P.319–351 (PWN – Polish Scient. Publishers, Warsaw, 1984) [in Russian].

[19] Coddington, E.A. and Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*// McGraw-Hill Book Co., Inc., New York - Toronto - London, 1955.

[20] Konyukhova, N.B. *On Numerical Isolation of the Solutions Tending to Zero at Infinity of Certain Two–Dimensional Non–Linear Sets of Ordinary Differential Equations*// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1970. – V.10. – P.74–87 [U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.– 1970. – V.10. – P.95–111].

[21] Konyukhova, N.B. *On the Limiting Behavior of a Bounded Solution of a System of Quasilinear of First–Order Partial Differential Evolution Equations as Time Grows to Infinity*// Differents. uravn. – 1992. – V.28. – P.1561–1573 [Diff. Equ. – 1992. – V.28. – P.1283–1293].

[22] Konyukhova, N.B. *Stationary Lyapunov Problem for a System of First–Order Quasilinear Partial Differential Equations*// Differents. uravn. – 1994. – V.30. – P.1384–1395 [Diff. Equ. – 1994. – V.30. – P.1284–1294].

[23] Konyukhova, N.B. *Stable Lyapunov Manifolds for Autonomous Systems of Non–Linear Ordinary Differential Equations*// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.– 1994. – V.34. – P.1358–1379 [Comput. Maths Math. Phys. – 1994. – V.34. – P.1179–1195].

[24] Derrick, G.H. *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*// J. Math. Phys. – 1964. – V.5. – P.1252–1254.

[25] Berestycki, H. and Lions, P.-L. *Nonlinear Scalar Field Equations, I, Existence of a Ground State*// Arch. Rat. Mech. Anal. – 1983. – V.82. – P.313–345; *II, Existence of Infinitely Many Solutions*// Arch. Rat. Mech. Anal. – 1983. – V.82. – P.347–375.

[26] Gazzola,F., Serrin, J. and Tang, M. *Existence of Ground States and Free Boundary Problems for Quasilinear Elliptic Operators*// Add. Diff. Equ. – 2000. – V.5.– P.1–30.

Dorodnicyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences
ul. Vavilova 40, 119333, Moscow, Russia
E-mail: nadja@ccas.ru

Centro de Matemática e Aplicações, Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais 1, 1049–001, Lisbon, Portugal
E-mail: plima@math.ist.utl.pt

Departamento de Matemática
Universidade de Trás os Montes e Alto Douro
Apartado 1013, 5000–311, Vila Real, Portugal

Proceeding of the International Conference

Crimea Autumn Mathematical School – Symposium 2007

MSC2000: primary 47B50, 47A53

V. A. Khatskevich, V. Senderov

THE KE-PROBLEM: DESCRIPTION OF DIAGONAL ELEMENTS

The Königs embedding problem (KE-problem), which was first used by G. Königs, P. Lévy, and J. Hadamard to solve various applied problems has a more than century-long history. The general statement of this problem is as follows. Let D be a domain in the complex Banach space, $f \in \mathrm{Hol}(D)$. Does there exist a family $\{F(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathrm{Hol}(D)$ continuously (in the topology of locally uniform convergence over D) depending on t and satisfying the conditions $F(0) = I$, $F(1) = f$, and $F(s+t) = F(s) \circ F(t)$ for all $s, t \geq 0$?

If the family $\{F(t)\}_{t\geq 0}$ exists, then f is said to have the KE-property.

In recent years, new works concerning the KE-problem and its applications have appeared. So, the case in which D is the unit open ball of the space $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, where $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$ are Hilbert spaces and f is the transformation of D generated by the (plus-) operator A by formula 1, was considered in [1, 2, 3]. The same case is also studied in the present paper.

In the present paper, we develop a new approach based on the properties of fixed points of mappings. It turns out that a wide class of mappings with a fixed point either in a sufficiently small neighborhood of zero or on the boundary of the unit ball has the KE-property. The results concerning the first of these cases were published in [3, 4, 5], the second case is studied in the present paper.

Let $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ be a complex indefinite ($\min\{\dim \mathfrak{H}_1, \dim \mathfrak{H}_2\} > 0$) Krein space, and let $\mathcal{K}$ be the open unit ball of the space $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$. The formula

$$K'_+ = \mathcal{F}_A(K_+) = (A_{21} + A_{22}K_+)(A_{11} + A_{12}K_+)^{-1}, \tag{1}$$

where K_+, $K'_+ \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, and $A_{ij} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_j, \mathfrak{H}_i)$ for $i, j = 1, 2$, defines a linear fractional mapping (l.f.m.) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A = \{K_+, K'_+\}$ in $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$.

In the present paper, we are interested in the mapping $\mathcal{F}_A \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. But we also consider the affine mapping on $\bar{\mathcal{K}}$. In this case, we denote the mapping of the ball $\mathcal{K}$ and its continuation to the closure $\bar{\mathcal{K}}$ by the same symbol $\mathcal{F}_A$.

In what follows, unless otherwise specified, we use the general functional and indefinite definitions and the notation from the respective fundamental monographs [6] and [7]. In particular, an everywhere defined bounded linear operator T in $\mathfrak{H}$ will be called a plus-operator if $[x, x] \geq 0$ implies $[Tx, Tx] \geq 0$. A plus-operator T is said to be strict if $\inf\limits_{[x,x]=1} [Tx, Tx] > 0$ and is said to be bistrict if, in addition, T^* is also a strict plus-operator. Further, according to the terminology introduced in [8, 9, 10], an operator A with the block-matrix $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ is said to be upper triangular if $A_{21} = 0$ and lower triangular if $A_{12} = 0$.

We recall that the maximal partial isometries, i.e., the isometries ($C : C^*C = I_1$) and the co-isometries ($C : CC^* = I_2$) are extreme points of the unit ball of the space $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ [11, Chapter XIII, Sec. 99].

We assume that a plus-operator A defines the affine mapping $\mathcal{F}_A$:

$$\mathcal{F}_A(K) = (A_{21} + A_{22}K)A_{11}^{-1} \tag{2}$$

of the open ball $\mathcal{K}$ into itself. Obviously, $\mathcal{F}_A(\bar{\mathcal{K}}) \subseteq \bar{\mathcal{K}}$; moreover, the l.f.m. $\mathcal{F}_A \colon \bar{\mathcal{K}} \to \bar{\mathcal{K}}$ is continuous in the weak operator topology. Since, in addition, the non-empty convex set $\bar{\mathcal{K}}$ is bicompact in this topology, it follows from the Schauder–Tikhonov–Gliksberg theorem (see, e.g., [7, Chapter III, Theorem 3.6]) that the mapping $\mathcal{F}_A$ has at least one fixed point in $\bar{\mathcal{K}}$.

Let C be a fixed point of the l.f.m. $\mathcal{F}_A$ of the form 2. Then $A_{21} + A_{22}C = CA_{11}$ or $A_{21} = CA_{11} - A_{22}C$. Substituting the last relation into 2, we obtain

$$\mathcal{F}_A(K) = A_{22}(K - C)A_{11}^{-1} + C, \tag{3}$$

where $K \in \mathcal{K}$.

Definition. (cf. [11, Chapter XIII, Sec. 98]). The set of vectors x from the domain a linear operator C which satisfy the condition $\|Cx\| = \|x\|$ is called the initial set $\mathcal{J}(C)$ of the linear operator C. The set $C(\mathcal{J}(C))$ is called the final set $R(C)$ of the linear operator C.

Theorem 1. *Let $\mathcal{F}_A\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ be an affine l.f.m. of the form*

$$\mathcal{F}_A(K) = A_{22}(K - C) + C,$$

where $K \in \mathcal{K}$ and $\|C\| = 1$. If $A_{22}x = \alpha x$, where $x \in R(C) \setminus \{0\}$, then $\alpha \in (0,\, 1]$.

Corollary 1. *Let $\mathcal{F}_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ be an affine l.f.m. of the form*

$$\mathcal{F}_A(K) = A_{22}(K - C) + C,$$

where $K \in \mathcal{K}$ and C is a coisometry. Then $\sigma_p(A_{22}) \subseteq (0,\, 1]$.

Lemma 1. *Under the conditions of Theorem 1, $(A_{22}x,\, x) \neq 0$ for $x \in R(C) \setminus \{0\}$.*

Corollary 2. *Under the conditions of Corollary 1, $(A_{22}x, x) \neq 0$ for $x \neq 0$.*

Theorem 2. *Under the conditions of Corollary 1, $A_{22} = \alpha I$, where $\alpha \in (0,\, 1]$.*

Proof. The proof is obtained by using Corollary 2. □

Theorem 3. *Let $\mathcal{F}_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ be an affine l.f.m. of the form*

$$\mathcal{F}_A(K) = (K - C)A_{11}^{-1} + C,$$

where $K \in \mathcal{K}$ and C is an isometry. Then $A_{11}^{-1} = \alpha I$, where $\alpha \in (0,\, 1]$.

Proof. The proof is similar to that of Theorem 2. □

The following argument shows that the coisometry in Theorem 2 or the isometry in Theorem 3 cannot be replaced by an arbitrary linear operator with norm 1.

Example. (V. Shulman). Let $\overline{C\mathfrak{H}_1} \neq \mathfrak{H}_2$. We consider a linear operator A_{22} with the following properties: $A_{22}\big|_{C\mathfrak{H}_1} = I\big|_{C\mathfrak{H}_1}$, $A_{22}((C\mathfrak{H}_1)^{\perp}) \subseteq (C\mathfrak{H}_1)^{\perp}$, $\|A_{22}\| = 1$. We have $A_{22}(K - C) + C = A_{22}K$, which implies that $\mathcal{F}_A(K) \in \mathcal{K}$ for $K \in \mathcal{K}$.

But we note that if $A_{22}(A_{11})$ is *a priori* a scalar operator, then the following refining remark about it can be obtained for any linear operator C with norm 1.

Remark. Let $\mathcal{F}_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ be an affine l.f.m. of the form

$$\mathcal{F}_A(K) = \alpha(K - C) + C, \tag{4}$$

where $K \in \mathcal{K}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, and $\|C\| = 1$. Then $\alpha \in (0,\, 1]$.

Proof. The proof is similar to that of Theorem 1. □

Remark. It is easy to see that the statement of the previous remark is invertible: for any $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $\|C\| = 1$, and $\alpha \in (0,\, 1]$, formula 4 determines an affine l.f.m. $\mathcal{F}_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$.

Theorem 4. *Let $\mathcal{F}_A\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ be an affine l.f.m. of the form*

$$\mathcal{F}_A(K) = A_{22}(K - C)A_{11}^{-1} + C,$$

where $K \in \mathcal{K}$, A_{11}, and C are unitary operators.

Then $A_{22} = \alpha C A_{11} C^{-1}$, where $\alpha \in (0,\, 1]$.

Proof. The proof is obtained by studying the mapping ψ,

$$\psi(K) = CA_{11}^{-1}C^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1} + A_{22}K),$$

which is an affine l.f.m. taking the open ball $\mathcal{K}$ into itself and satisfying the conditions of Theorem 2. □

Proposition 1. Any l.f.m. $\mathcal{F}_A$ of the ball $\mathcal{K}$ into itself satisfying the conditions of Theorem 4 can be determined by the triple $\{A_{11}, C, \alpha\}$ according to the formula

$$\mathcal{F}(K) = \alpha CA_{11}C^{-1}KA_{11}^{-1} + (1-\alpha)C, \tag{5}$$

where $K \in \mathcal{K}$.

Conversely, for any unitary A_{11} and C and any $\alpha \in (0, 1]$, formula 5 determines the affine l.f.m. in Theorem 4.

Theorem 5. *Let $\mathcal{F}_A\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ be an affine l.f.m. of the form*

$$\mathcal{F}_A(K) = A_{22}(K - C)A_{11}^{-1} + C,$$

where $K \in \mathcal{K}$, C is a unitary operator, and A_{22} is an isometry. Then the statement of Theorem 4 holds.

Proof. The proof is obtained by studying the mapping ψ,

$$\psi(K) = (KA_{11}^{-1} + C - A_{22}CA_{11}^{-1})C^{-1}A_{22}C,$$

which is an affine l.f.m. taking the open ball $\mathcal{K}$ into itself and satisfying the conditions of Theorem 3. □

Proposition 2. Suppose that, on some subset of the space $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, an upper triangular plus-operator A such that $0 \in \rho(A_{11})$ determines an l.f.m. $\mathcal{F}_A$; suppose also that $\mathcal{F}_A(C) = C$, where $C \neq 0$. Then

(a) A is a bistrict plus-operator;

(b) the l.f.m. $\mathcal{F}_A$ and $\mathcal{F}_{A^*}$ are determined at any point of the closed ball $\overline{\mathcal{K}}$;

(c) $\mathcal{F}_A(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, $\mathcal{F}_{A^*}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, $\mathcal{F}_A(\overline{\mathcal{K}}) \subseteq \overline{\mathcal{K}}$, $\mathcal{F}_{A^*}(\overline{\mathcal{K}}) \subseteq \overline{\mathcal{K}}$.

Lemma 2. *Suppose that, under the conditions of Proposition 2, the operator C is unitary. Then $\mathcal{F}_{A^*}(-C) = -C$.*

Theorem 6. *Suppose that, under the conditions of Lemma 2, at least one of the operators A_{11} and A_{22} is a coisometry. Then the statement of Theorem 4 holds.*

Proof. This theorem is proved by using Proposition 2, Lemma 2, Theorem 4, and Theorem 5. □

The main statements of the present paper are obtained from Theorems 2, 3, and 6 by using Proposition 2 of the present paper and Lemmas 1–3 from [3].

Theorem 7. *Let $\mathcal{F}_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ be an affine l.f.m. of the form*

$$\mathcal{F}_A(K) = A_{22}(K - C)A_{11}^{-1} + C,$$

where $K \in \mathcal{K}$ and

either $A_{11} = I$ and C is a coisometry

or $A_{22} = I$ and C is an isometry.

Then the mapping $\mathcal{F}_A$ has the KE-property.

Theorem 8. *Any mapping $\mathcal{F}_A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ satisfying relation 4 has the KE-property.*

Theorem 9. *Suppose that, on some subset of the space $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, the upper triangular plus-operator A such that $0 \in \rho(A_{11})$ determines an l.f.m. $\mathcal{F}_A$; $\mathcal{F}_A(C) = C$, where C is a unitary operator; and at least one of the operators A_{11} and A_{22} is the unit operator. Then the restriction $\mathcal{F}_A\big|_{\mathcal{K}}$ has the KE-property.*

References

[1] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet, *Schroeder's functional equation and the Koenigs embedding property* // Nonlinear Anal. – 2001. – V. 47. – p. 3977-3988.

[2] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet, *Abel-Schroeder equations for linear fractional mappings and the Koenigs embedding problem* // Acta Sci. Math. (Szeged) – 2003. – V. 69. – p. 67-98.

[3] V. Khatskevich and V. Senderov, *The Koenigs problem for linear fractional mappings* // Dokl. Ross. Akad. Nauk – 2005. – V. 403, No. 5. – p. 607-609. (in Russian).

[4] M. Elin and V. Khatskevich, *The Koenigs embedding problem for operator affine mappings* // Contemp. Math. – 2005. – V. 382. – p. 113-120.

[5] M. Elin and V. Khatskevich, *Triangular plus-operators in Banach spaces: applications to the Koenigs embedding problem* // J. Nonlinear and Convex Anal. – 2005. – V. 6, No. 1. – p. 173-185.

[6] N. Danford and J. Schwartz, *Linear Operators.* – Pt. 1. – *General Theory* // New York–London – Interscience Publ. – 1958.

[7] T. Ya. Azizov and I. S. Yochvidov, *Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric*// Chichester – John Wiley and Sons – 1989.

[8] V.A. Khatskevich and V.A. Senderov, *The Abel–Schröder equations for linear fractional maps of operator balls*// Dokl. Ross. Akad. Nauk – 2001. – V. 379, No. 4. – p. 455-458. (in Russian).

[9] V. Khatskevich and V. Senderov, *The Abel–Schröder equations for linear fractional maps of operator balls*// Functional Differential Equations – 2003. – V. 10, No. 1/2. – p. 239-258.

[10] V. Khatskevich and V. Senderov, *Basic properties of linear fractional mappings of operator balls: Schröder's equation* // in: *Fields Institute Communications* – 2000. – V. 25. – p. 331-344.

[11] Paul R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*// Toronto–London – 1967.

Mathematics ORT Braude Academic College
College Campus P.O. Box 78, 21982, Karmiel, Israel
E-mail: victor_kh@hotmail.com; vkhats@braude.ac.il

Pyatnitskoe highway, 23-2-156, 125430, Moscow, Russia
E-mail: jsadovskaya@mail.ru

Proceeding of the International Conference

Crimea Autumn Mathematical School – Symposium 2007

MSC2000: 93D15

J.-P. Lohéac

BOUNDARY STABILIZATION OF HYPERBOLIC PROBLEMS INVOLVING SINGULARITIES

1. Introduction

In this paper we will discuss about the means to get stabilization of the solution of a wave equation, or of the elastodynamic system, by applying some feedback law on a part of the boundary of the spacial domain. Our aim is to obtain the (exponential) decrease of the energy function with respect to time. Then we have to choose

(1) the "active" part of the boundary where our feedback will be applied,
(2) some convenient function defining the feedback law.

The corresponding boundary value problem is a mixed problem which involves singularities in its solution when there exists a non-empty interface between "active" and "passive" parts of the boundary (see Figure 1).

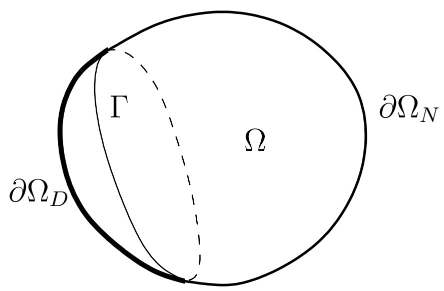

Рис. 1. Ω is the spacial domain, $\partial\Omega_N$ is the "active" part, $\partial\Omega_D$ is the "passive" one and $\Gamma = \overline{\partial\Omega_D} \cap \overline{\partial\Omega_N}$ is the interface.

In the both cases (wave equation and elastodynamic system), we will apply the multiplier method (see [18]). This method has been introduced in [16] in the case of an observability problem for the wave equation. One may also use techniques of microlocal analysis as well as in [17] but this usually does not give explicitly the decreasing rate of the energy function.
The main tool of our method is the following Lemma (used in [15] and [22]). Its proof can be found in [18].

Lemma 1. *Let $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ be a non-increasing function such that there exists $C > 0$ independent of t such that*

$$\forall t \geq 0\,, \quad \int_t^\infty E(s)\,ds \leq C\,E(t)\,, \tag{1}$$

then we have: $\quad \forall t \geq C\,, \quad E(t) \leq E(0)\exp\Big(1 - \dfrac{t}{C}\Big).$

In the following, we apply this result to the energy function. Our computation contains three main steps:

- *first step*: the energy of a strong solution is non-increasing with respect to time,
- *second step*: it satisfies (1),
- *third step*: a density argument allows to extend the result to the case of a weak solution.

The crucial point appears in the computation of the second step when we use a hidden regularity result which allows us to apply some Rellich relation.
The paper is organized as follows:

- in section 2, we introduce notations and write down the problems of boundary stabilization for the wave equation and for the elastodynamic system,
- in Section 3, we consider the case of the wave equation and we especially study the elements of the domain of the corresponding operator,
- in Section 4, we proceed as above for the elastodynamic system,
- in Section 5, we discuss some extensions in progress.

2. Notations and statement of the problems

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded connected open set such that its boundary satisfies

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N\,, \qquad \text{with} \begin{cases} \partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset\,, \\ \mathrm{meas}_{\partial\Omega}(\partial\Omega_D) \neq 0\,, \\ \mathrm{meas}_{\partial\Omega}(\partial\Omega_N) \neq 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

Let us denote the boundary interface by $\Gamma = \overline{\partial\Omega_D} \cap \overline{\partial\Omega_N}$ and assume that

$$\left|\begin{array}{l} \partial\Omega \text{ is a } (n-1)\text{-dimensional submanifold of class } \mathcal{C}^2\,, \\ \Gamma \text{ is a } (n-2)\text{-dimensional submanifold of class } \mathcal{C}^3\,, \\ \text{there exists a neighborhood } \Omega' \text{ of } \Gamma \text{ such that} \\ \quad \partial\Omega \cap \Omega' \text{ is a } (n-1)\text{-submanifold of class } \mathcal{C}^3\,. \end{array}\right. \tag{3}$$

Under above assumptions, Ω is smooth enough so that for almost every $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, we can consider $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ the normal unit vector pointing outward of Ω.
We assume moreover that there exists $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ such that, setting $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, we have (see Figures 2)

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nu} \leq 0\,, \quad \text{on } \partial\Omega_D\,, \qquad \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nu} \geq 0\,, \quad \text{on } \partial\Omega_N\,, \\ \mathrm{meas}_{\partial\Omega}\{\mathbf{x} \in \partial\Omega_N \,/\, \mathbf{m}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) > 0\} \neq 0\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

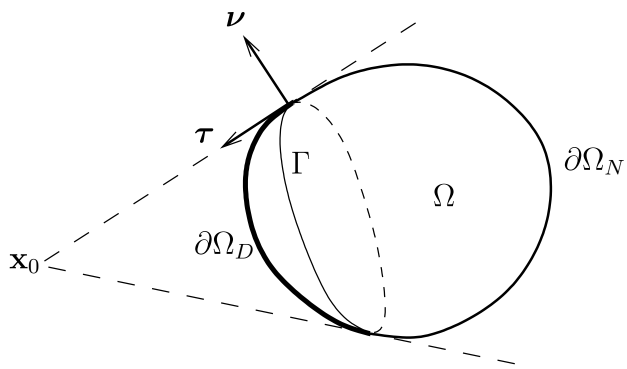

Рис. 2. Partition of the boundary.

Since $\partial\Omega$ is smooth enough, one can observe that, if $\Gamma \neq \emptyset$, then

$$\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0\,, \quad \text{on } \Gamma\,. \tag{5}$$

Under a further geometrical assumption we will obtain boundary stabilization results for the wave equation and the elastodynamic system in $\Omega \times \mathbb{R}_+$.
Let us now write these two problems.

2.1. **The wave equation.** We here consider the wave problem introduced in [20],

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0\,, & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+\,,\\ u = 0\,, & \text{on } \partial\Omega_D \times \mathbb{R}_+\,,\\ \partial_\nu u = -\mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ u'\,, & \text{on } \partial\Omega_N \times \mathbb{R}_+\,,\\ u(0) = u_0\,, & \text{in } \Omega\,,\\ u'(0) = u_1\,, & \text{in } \Omega\,, \end{cases} \tag{6}$$

where u' and u'' are respectively the first and the second time-derivatives of unknown u and $\partial_\nu u$ is the normal derivative of u.
Here the feedback law is given by the choice of the active part $\partial\Omega_N$ of the boundary (see (2) and (4)) and the feedback function,

$$\phi(\mathbf{x}, t, u, u') = -\mathbf{m}(\mathbf{x}).\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\ u'(\mathbf{x}, t)\,.$$

This problem has been studied in [20] and by many other authors (see [18] and references therein). But due to lack of regularity of solutions for problem with mixed boundary conditions, these authors have been lead to assume geometrical restrictions on the shape of Ω. The commonly encountered hypothesis is that the interface Γ is empty. This assumption is partly relaxed in [20] thanks to a restriction concerning the dimension.
The first work [11] taking in account the presence of singularities is devoted to a problem of boundary controllability of the wave equation.
For boundary stabilization, this question has been firstly solved in [25] and a complete generalization is given in [3]. In these two works as well as in [11], a hidden regularity property of the elements of the domain of the wave operator is proved and this allows to apply some Rellich relation which is crucial in getting the estimate (1).

2.1.1. *Well-posedness.* In order to prove the well-posedness of (6), we can use the semi-group method. To this end, we consider following Sobolev spaces: $\mathrm{L}^2(\Omega)$, $\mathrm{H}^1(\Omega)$, and $\mathrm{H}^1_D(\Omega) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,/\, v = 0\,,\ \text{on } \partial\Omega_D\}$.
We first build strong solutions after introducing the operator $\mathcal{A}_w$ such that

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_w) = \{(u, v) \in \mathrm{H}^1_D(\Omega) \times \mathrm{H}^1_D(\Omega)\,/\ & \Delta u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ and}\\ & \partial_\nu u = -\mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ v\,, \text{on } \partial\Omega_N\}\,,\\ \mathcal{A}_w(u, v) = (v, \Delta u)\,. & \end{aligned} \tag{7}$$

Formally, (6) can be rewritten as follows

$$\begin{cases} (u, u')' - \mathcal{A}_w(u, u') = (0, 0)\,,\\ (u, u')(0) = (u_0, u_1)\,. \end{cases}$$

The second step consists in proving the existence of weak solutions by a density argument, provided that initial data satisfy

$$(u_0, u_1) \in \mathrm{H}^1_D(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)\,. \tag{8}$$

The uniqueness is obtained thanks to the linearity of the problem.

2.1.2. *Energy function.* Energy function is given by

$$E_w(u, t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|u'|^2 + |\nabla u|^2)\, d\mathbf{x}\,. \tag{9}$$

Under above assumptions, by applying Green's formula, one can easily prove that the time-derivative of the energy function satisfies for almost every $t > 0$,

$$E'_w(u, t) = -\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |u'|^2\, d\sigma\,. \tag{10}$$

Then the energy function is non-increasing with respect to time.

2.1.3. *Stabilization result.* We will see that under a weak and simple geometrical assumption, we can get the stabilization result obtained in [20].
First let us introduce some new notation.
Under assumption (3), at every point $\mathbf{x}$ of Γ, the interface Γ can be considered as a $\mathcal{C}^3$-submanifold of $\partial\Omega$ of codimension 1. So we can define in the tangent space the unit normal vector pointing towards the exterior of $\partial\Omega_N$ ("from $\partial\Omega_N$ to $\partial\Omega_D$"). This vector will be denoted by $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ (see Figure 2).
Now our geometrical condition can be written as follows

$$\mathbf{m}.\boldsymbol{\tau} \leq 0\,, \qquad \text{on } \Gamma\,. \tag{11}$$

Then, under previous conditions, the energy of the solution of (6) is exponentially decreasing as stated below.

Theorem 1. *Let be $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Assume that Ω is an open bounded connected subset of $\mathbb{R}^n$ and that there exists $\mathbf{x}_0$ such that (2)–(4) hold.*
Then if (11) is satisfied, there exists a constant $T > 0$ such that for every initial condition verifying (8), the energy (9) of the solution of (6) satisfies

$$\forall t > T\,, \quad E_w(u,t) \leq E_w(u,0)\, \exp\Big(1 - \frac{t}{T}\Big)\,.$$

Remark 5. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open bounded convex domain of class $\mathcal{C}^3$ and $\mathbf{x}_0$ belonging to $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Then if we define

$$\partial\Omega_N = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega_N \,/\, \mathbf{m}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) > 0\}\,, \qquad \partial\Omega_D = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_N\,,$$

assumptions (2), (3), (4) and (11) are satisfied.

2.2. **The elastodynamic system.** In this part, we will consider an elastic body which satisfies Lamé's laws. As usual, we define the strain tensor and the stress tensor for a regular vector field $\mathbf{v}$ by

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\,(\partial_i \mathbf{v}_j + \partial_j \mathbf{v}_i)\,, \qquad \sigma(\mathbf{v}) = 2\mu\,\epsilon(\mathbf{v}) + \lambda\,\mathrm{div}(\mathbf{v}) I_n\ ,,$$

where λ and μ are the Lamé's coefficients and I_n is the identity matrix of $\mathbb{R}^n$.
Inspired by the above case of the wave equation, we introduce the following problem.

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' - \mathrm{div}(\sigma(\mathbf{u})) = \mathbf{0}\,, & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}\,, & \text{on } \partial\Omega_D \times \mathbb{R}_+\,, \\ \sigma(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ \mathbf{u}'\,, & \text{on } \partial\Omega_N \times \mathbb{R}_+\,, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0\,, & \text{in } \Omega\,, \\ \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1\,, & \text{in } \Omega\,. \end{cases} \tag{12}$$

Hence we define a new feedback law by the above choice of the active part $\partial\Omega_N$ of the boundary (see (2) and (4)) and the feedback function,

$$\Phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = -\mathbf{m}(\mathbf{x}).\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\ \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\,.$$

This feedback is new with respect to the "natural" feedback: $\Phi_\ell(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = -a\mathbf{u} - b\mathbf{u}'$, introduced by Lagnese in [21].
Here we have observed that when applying a similar feedback in the case of the wave equation (i.e. $-au - bu'$), the above computation fails in presence of singularities. That is why we have introduced this new feedback function.
In [22, 19], another feedback has been introduced, in order to obtain a stabilization result.
In [1], a stabilization result has been obtained with the natural feedback Φ_ℓ. This work has been extended in [13, 14, 2]. In all these works, geometrical restrictions are such that singularities do not appear. The most general result concerning Lamé system has been obtained by M. A. Horn [17], using micro-local analysis techniques.
We have followed the case of the wave equation to obtain a stabilization result (see [6, 7, 8]).

2.2.1. *Well-posedness.* We introduce spaces: $\mathbb{L}^2(\Omega) = (\mathrm{L}^2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1(\Omega) = (\mathrm{H}^1(\Omega))^n$, and $\mathbb{H}^1_D(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega) \,/\, \mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \text{ on } \partial\Omega_D\}$.
We then follow the above method to prove the well-posedness of (12). The corresponding operator $\mathcal{A}_e$ is given by

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_e) = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{H}^1_D(\Omega) \times \mathbb{H}^1_D(\Omega) \,/\, & \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ and} \\ & \sigma(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ \mathbf{v}\,, \text{ on } \partial\Omega_N\}\,, \\ \mathcal{A}_e(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}))\,. & \end{aligned} \tag{13}$$

We first build strong solutions and secondly weak solutions, provided that initial data satisfy

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) \in \mathbb{H}^1_D(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)\,. \tag{14}$$

2.2.2. *Energy function.* Energy function is given by

$$E_e(\mathbf{u},t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\mathbf{u}'|^2 + \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}))\, d\mathbf{x}\,. \tag{15}$$

Again, one can easily prove that the time-derivative of the energy function satisfies for almost every $t > 0$,

$$E'_e(\mathbf{u},t) = -\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |\mathbf{u}'|^2\, d\sigma\,. \tag{16}$$

Then the energy function is non-increasing with respect to time.

2.2.3. *Stabilization result.* Under above geometrical assumptions, we can prove a very similar stabilization result.

Theorem 2. *Let be $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Assume that Ω is an open bounded connected subset of $\mathbb{R}^n$ and that there exists $\mathbf{x}_0$ such that* (2)–(4) *hold.*
Then if (11) *is satisfied, there exists a constant $T > 0$ such that for every initial condition verifying* (14)*, the energy* (15) *of the solution of* (12) *satisfies*

$$\forall t > T\,, \quad E_e(\mathbf{u},t) \leq E_w(\mathbf{u},0)\, \exp\Big(1 - \frac{t}{T}\Big)\,.$$

Again, we will see that the proof of this result is based on a hidden regularity result concerning the domain of the operator $\mathcal{A}_e$.

3. Boundary stabilization of the wave equation

The idea of proof of Theorem 1 is to apply Lemma 1 to the function $t \longmapsto E_w(u,t)$ where u is a strong solution of (6) and to extend the result to weak solutions by using a density argument, provided that constant C appearing in (1) is independent of initial data.
Hence let us firstly consider a strong solution of (6), i.e. such that initial data belong to $D(\mathcal{A}_w)$.
Thanks to (10), one can easily see that $t \longmapsto E_w(u,t)$ is non-increasing.
In order to prove (1), we use the multiplier method. Following [18], we set

$$Mu = 2\,\mathbf{m}.\nabla u + (n-1)u\,. \tag{17}$$

We will multiply the wave equation by Mu and integrate in $\Omega \times (S,T)$ with $T > S > 0$.
Let us begin the computation. Formally, we get

$$0 = \int_S^T \int_\Omega (u'' - \Delta u)\, Mu\, d\mathbf{x}\, dt\,.$$

Performing integration by parts in (S,T) and Green formula in Ω, we obtain, without taking in account any boundary condition,

$$\begin{aligned} 0 = &\left[\int_\Omega u'\, Mu\ d\mathbf{x}\right]_S^T - 2\int_S^T \int_\Omega \Delta u\ \mathbf{m}.\nabla u\ d\mathbf{x}\, dt \\ &+ \int_S^T \int_\Omega \big(|u'|^2 + (n-1)\,|\nabla u|^2\big)\, d\mathbf{x}\, dt - \int_S^T \int_{\partial\Omega} \big((n-1)\, u\, \partial_\nu u + \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |u'|^2\big)\, d\sigma\, dt\,. \end{aligned}$$

Using Cauchy-Schwarz inequality and Poincaré relation, we can estimate, for almost every $t > 0$, $\left|\int\limits_\Omega u'\, Mu\, d\mathbf{x}\right|$ by $CE_w(u,t)$ where $C > 0$ is a constant independent of u.
Then, since $t \longmapsto E_w(u,t)$ is non-increasing, we can write

$$\begin{aligned}2\,CE_w(u,S) \geq\ &-2\int\limits_S^T\int\limits_\Omega \Delta u\ \mathbf{m}.\nabla u\ d\mathbf{x}\,dt + \int\limits_S^T\int\limits_\Omega \left(|u'|^2 + (n-1)\,|\nabla u|^2\right) d\mathbf{x}\,dt \\ &-\int\limits_S^T\int\limits_{\partial\Omega} \left((n-1)\,u\,\partial_\nu u + \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |u'|^2\right) d\sigma\,dt\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Now, in order to go on in this computation, we should have to apply a Rellich relation [26] to the first term of above right-hand side, as well as in [20]. To this end, we to analyze the local structure of u near the interface Γ. Observe that since u is a strong solution of (6), then for every $t \leq 0$, $(u,u')(t)$ belongs to $D(\mathcal{A}_w)$. This is made in the both following Subsections which leads to Theorem 3.
A direct consequence of this result is the following Lemma.

Lemma 2. *Let be $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Assume that Ω is an open bounded connected subset of $\mathbb{R}^n$ and that there exists $\mathbf{x}_0$ such that* (2)–(4) *hold.*
Then if (11) *is satisfied and if (u,v) belongs to $D(\mathcal{A}_w)$, the following inequality is satisfied*

$$2\int\limits_\Omega \Delta u\ \mathbf{m}.\nabla u\ d\mathbf{x}\ \leq (n-2)\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + \int\limits_{\partial\Omega}\left(2\,\partial_\nu u\ \mathbf{m}.\nabla u - \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |\nabla u|^2\right) d\sigma\,.$$

Then (18) leads to

$$2\,CE_w(u,S) \geq 2\int\limits_S^T\int\limits_\Omega E_w(u,t)\,dt - \int\limits_S^T\int\limits_{\partial\Omega}\left(Mu\,\partial_\nu u + \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ (|u'|^2 - |\nabla u|^2)\right) d\sigma\,dt\,,$$

and, taking in account boundary conditions in (6), we get

$$2\int\limits_S^T\int\limits_\Omega E_w(u,t)\,dt \leq 2\,CE_w(u,S) + \int\limits_S^T\int\limits_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ \left(|u'|^2 - |\nabla u|^2 - u'\,Mu)\right) d\sigma\,dt\,.$$

A technical computation gives that for every $\varepsilon > 0$, we can build a constant $\rho(\varepsilon) > 0$ such that

$$|u'|^2 - |\nabla u|^2 - u'\,Mu \leq \rho(\varepsilon)|u'|^2 + \varepsilon|u|^2\,, \qquad \text{on } \partial\Omega_N\,.$$

Then using (10) and Poincaré inequality, we get a positive constant k such that

$$2\int\limits_S^T\int\limits_\Omega E_w(u,t)\,dt \leq 2\,CE_w(u,S) - \rho(\varepsilon)\int\limits_S^T E_w'(u,t)\,dt + k\varepsilon\int\limits_S^T E_w(u,t)\,dt\,.$$

Let us define $\theta = k\varepsilon$ and recall that $t \longmapsto E_w(u,t)$ is non-increasing.
Then we can write that for every $\theta > 0$, there exists $C(\theta) > 0$, depending only on θ and geometrical data, such that

$$2\int\limits_S^T\int\limits_\Omega E_w(u,t)\,dt \leq C(\theta)\,E_w(u,S) + \theta\int\limits_S^T E_w(u,t)\,dt\,.$$

Now we have only to choose $\theta \in (0,2)$ and to apply Lemma 1. We then get the required result for strong solutions.
Since above constant $C(\theta)$ does not depend on initial data, the stabilization result can be extended to weak solutions. This ends the proof of Theorem 1.
Let us now complete this Section by some words about the hidden regularity of strong solutions and Rellich relation.

3.1. **Hidden regularity of strong solutions of** (6)**.** Let us consider an element (u, v) of $D(\mathcal{A}_w)$. we can easily observe that

$$\Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\,, \quad u_{/\partial\Omega_D} \in \mathrm{H}^{3/2}(\partial\Omega_D)\,, \quad \partial_\nu u_{/\partial\Omega_N} \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega_N)\,. \tag{19}$$

Then, using a classical trace result, one can show that $u = \tilde{u} + U$ where $\tilde{u} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ and U satisfies the following mixed Laplace problem

$$\begin{cases} -\Delta U = F\,, & \text{in } \Omega\,, \\ U = 0\,, & \text{on } \partial\Omega_D\,, \\ \partial_\nu U = 0\,, & \text{on } \partial\Omega_N\,, \end{cases} \tag{20}$$

where $F \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.
It is well-known that even if F is regular, the solution of (20) does not necessarily belongs to $\mathrm{H}^2(\Omega)$. A classical example is given by the Shamir function [27].
Let Ω_0 be the semi-disk described in polar coordinates as follows:

$$\Omega_0 = \{(r, \theta)\,/\,0 < r < 1\,,\ 0 < \theta < \pi\}\,,$$

and let us define: $\partial\Omega_{0N} = \{(r, \pi)\,/\,0 < r < 1\}$ and: $\partial\Omega_{0D} = \partial\Omega_0 \setminus \partial\Omega_{0N}$. The Shamir function is

$$U_s(r, \theta) = r^{1/2} \varrho(r) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,, \tag{21}$$

where ϱ is a $\mathcal{C}^\infty$-function with compact support such that: $\varrho(r) = 1$, in some neighbourhood of 0 and: $\mathrm{supp}(\varrho) \subset [-\rho, \rho] \subset (-1, 1)$, where $\rho > 0$ is as small as we want.
This function is not locally H^2 at the origin.
Under geometrical conditions (2)–(4), we can build a local $\mathcal{C}^2$-diffeomorphism near some point of the interface Γ so that after applying it, every u satisfying (19) can be written as a linear combination of a regular part (i.e. H^2) and above Shamir function (21).
This result has been firstly obtained in [10, 11]. It has been extended to the case when the interface is a straight line in [25], and generalized in [3].

3.2. **Extended Rellich relation.** If u belongs to $\mathrm{H}^2(\Omega)$, one could apply the classical Rellich relation

$$2 \int_\Omega \Delta u\ \mathbf{m}.\nabla u\ d\mathbf{x} = (n-2) \int_\Omega |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left(2\,\partial_\nu u\ \mathbf{m}.\nabla u - \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |\nabla u|^2\right) d\sigma\,.$$

This holds when the interface Γ is empty (see [20]).
But in our case, we can only say that u is locally H^2 at each point of $\overline{\Omega} \setminus \Gamma$. Then we apply the above relation by replacing Ω by

$$\Omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega\,/\,d(\mathbf{x}, \Gamma) > \varepsilon\}\,,$$

and we try to obtain a limit relation when ε tends to 0 by using the above local structure result.
The general following result is obtained in [3].

Theorem 3. *Assume that $n \geq 3$ and Ω is a bounded open set satisfying* (2)–(3)*.*
If $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ satisfies (19)*, then $2\,\partial_\nu u\ \mathbf{m}.\nabla u - \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |\nabla u|^2$ belongs to $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ and there exists $\zeta \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ such that*

$$\begin{aligned} 2 \int_\Omega \Delta u\ \mathbf{m}.\nabla u\ d\mathbf{x} = &\ (n-2) \int_\Omega |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left(2\,\partial_\nu u\ \mathbf{m}.\nabla u - \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |\nabla u|^2\right) d\sigma \\ &+ \int_\Gamma \mathbf{m}.\boldsymbol{\tau}\ |\zeta|^2\, d\gamma\,. \end{aligned}$$

Remark 6. A similar result holds when $n = 2$ and Γ is a finite discrete set. The further term is: $\sum\limits_{\mathbf{s} \in \Gamma} \mathbf{m}(\mathbf{s}).\boldsymbol{\tau}(\mathbf{s})\ |c_{\mathbf{s}}|^2$, where $c_{\mathbf{s}}$ is the singularity coefficient at point $\mathbf{s} \in \Gamma$.

Then Lemma 2 is a direct consequence of above formula and (11).

4. Boundary stabilization of the elastodynamic system

As well as above we first consider a strong solution $\mathbf{u}$ of (12) and we apply multiplier method. The reader will find details of computation in [8]. The multiplier we introduce here is

$$\mathbf{Mu} = 2(\mathbf{m}.\nabla)\mathbf{u} + (n-1)\mathbf{u}\,.$$

From the main equation of (12), we deduce

$$\int_S^T \int_\Omega \mathbf{u}''.\mathbf{Mu}\; d\mathbf{x}dt = \int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})).\mathbf{Mu}\; d\mathbf{x}dt\,. \tag{22}$$

Integrating by parts in time, applying Green formula and taking in account boundary conditions in (12), we first get

$$\int_S^T \int_\Omega \mathbf{u}''.\mathbf{Mu}\; d\mathbf{x}\,dt = \Big[\int_\Omega \mathbf{u}'.\mathbf{Mu}\; d\mathbf{x}\Big]_S^T + \int_S^T \int_\Omega |\mathbf{u}'|^2\,d\mathbf{x}\,dt - \int_S^T \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\; |\mathbf{u}'|^2\,d\sigma\,dt\,. \tag{23}$$

Using again Green formula, the right hand-side can be computed as follows

$$\begin{aligned}\int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})).\mathbf{Mu}\; d\mathbf{x}\,dt =\;& 2\int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})).(\mathbf{m}.\nabla)\mathbf{u}\; d\mathbf{x}\,dt\\ &-(n-1)\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\;\mathbf{u}'.\mathbf{u}\;d\sigma\,dt - (n-1)\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}):\epsilon(\mathbf{u})\,d\mathbf{x}\,dt\,.\end{aligned}$$

As above, we will use a Rellich relation given below and estimate the term $2\int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})).(\mathbf{m}.\nabla)\mathbf{u}\; d\mathbf{x}\,dt$ as follows.

Lemma 3. *Let be $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Assume that Ω is an open bounded connected subset of $\mathbb{R}^n$ and that there exists $\mathbf{x}_0$ such that (2)–(4) hold.*
Then if (11) is satisfied and if $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ belongs to $D(\mathcal{A}_e)$, the following inequality is satisfied

$$2\int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})).(\mathbf{m}.\nabla)\mathbf{u}\; d\mathbf{x}\,dt \leq (n-2)\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}):\epsilon(\mathbf{u})\,d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \Theta(\mathbf{u},\mathbf{u})\,d\sigma\,,$$

where $\Theta(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 2\,(\sigma(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}).(\mathbf{m}.\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\;\sigma(\mathbf{u}):\epsilon(\mathbf{u})$ *belongs to* $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$

Then using boundary conditions, we get

$$\begin{aligned}\int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})).\mathbf{Mu}\; d\mathbf{x}\,dt \leq\;& -\int_S^T \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}):\epsilon(\mathbf{u})\,d\mathbf{x}\,dt\\ &-\int_S^T \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\;\big(2\mathbf{u}'.(\mathbf{m}.\nabla)\mathbf{u} + \sigma(\mathbf{u}):\epsilon(\mathbf{u})\big)\,d\sigma\,dt.\\ &-(n-1)\int_S^T \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\;\mathbf{u}'.\mathbf{u}\;d\sigma\,dt\,.\end{aligned} \tag{24}$$

From (22)–(24), we deduce

$$\begin{aligned}2\int_S^T E_e(\mathbf{u},t)\,dt \leq\;& -\Big[\int_\Omega \mathbf{u}'.\mathbf{Mu}\; d\mathbf{x}\Big]_S^T + \int_S^T \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\;|\mathbf{u}'|^2\,d\sigma\,dt\\ &-(n-1)\int_S^T \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}\boldsymbol{\nu}\;\mathbf{u}'.\mathbf{u}\;d\sigma\,dt\\ &-\int_S^T \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\;\big(2\mathbf{u}'.(\mathbf{m}\nabla)\mathbf{u} + \sigma(\mathbf{u}):\epsilon(\mathbf{u})\big)\,d\sigma\,dt\,.\end{aligned} \tag{25}$$

As above, we get $\displaystyle \left|\left[\int_\Omega \mathbf{u}'.\mathbf{Mu}\, d\mathbf{x}\right]_S^T\right| \le 2\,C\,E_e(\mathbf{u},S)$.

Furthermore, thanks to (16), $\displaystyle \int_S^T\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ |\mathbf{u}'|^2\, d\sigma\, dt = E_e(S) - E_e(T) \le E_e(S)$.

The both last terms in (25) can be estimated by $\displaystyle C(\theta)\,E_e(\mathbf{u},S) + \theta\int_S^T E_e(\mathbf{u},t)\,dt$ where $\theta > 0$ is arbitrary and $C(\theta) > 0$ is independent of initial data (see details in [8]).
Hence we can end the proof as well as in the previous case.
We give now some elements about the hidden regularity and the Rellich relation.

4.1. **Hidden regularity of strong solutions of** (12)**.** If $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ belongs to $D(\mathcal{A}_e)$. then

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \in \mathbb{L}^2(\Omega)\,, \quad \mathbf{u}_{/\partial\Omega_D} \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega_D)\,, \quad \sigma(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{/\partial\Omega_N} \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega_N)\,. \tag{26}$$

Then, using a classical trace result, one can show that $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{U}$ where $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ and $\mathbf{U}$ satisfies the following mixed Lamé problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{U})) = \mathbf{F}\,, & \text{in } \Omega\,, \\ \mathbf{U} = \mathbf{0}\,, & \text{on } \partial\Omega_D\,, \\ \sigma(\mathbf{U})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}\,, & \text{on } \partial\Omega_N\,, \end{cases} \tag{27}$$

where $\mathbf{F} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.
Even if $\mathbf{F}$ is regular, the solution of (27) does not necessarily belongs to $\mathbb{H}^2(\Omega)$. An example can be extracted from [24].
Let Ω_0 be the semi-disk described in polar coordinates as follows:

$$\Omega_0 = \{(r,\theta)\,/\,0 < r < 1\,,\ 0 < \theta < \pi\}\,,$$

and let us define: $\partial\Omega_{0N} = \{(r,\pi)\,/\,0 < r < 1\}$ and: $\partial\Omega_{0D} = \partial\Omega_0 \setminus \partial\Omega_{0N}$. The singular function is

$$\mathbf{U}_s(r,\theta) = \varrho(r)\sqrt{r}\left[\cos(k\ln(r))\begin{pmatrix} a(\theta) - m(\theta) \\ b(\theta) + n(\theta)\end{pmatrix} + \sin(k\ln(r))\begin{pmatrix} -b(\theta) + n(\theta) \\ a(\theta) + m(\theta)\end{pmatrix}\right], \tag{28}$$

where ϱ is a $\mathcal{C}^\infty$-function with compact support such that: $\varrho(r) = 1$, in some neighbourhood of 0 and: $\operatorname{supp}(\varrho) \subset [-\rho,\rho] \subset (-1,1)$, where $\rho > 0$ is as small as we want, and functions a, b, m, n are

$$a(\theta) = \nu_0\Big[\sin\Big(-\frac{3}{2}\theta\Big) - \sin\Big(\frac{1}{2}\theta\Big) - 2k\Big(\cos\Big(-\frac{3}{2}\theta\Big) - \cos\Big(\frac{1}{2}\theta\Big)\Big)\Big]\exp(k\theta)\,,$$

$$b(\theta) = \nu_0\Big[\cos\Big(-\frac{3}{2}\theta\Big) - \cos\Big(\frac{1}{2}\theta\Big) + 2k\Big(\sin\Big(-\frac{3}{2}\theta\Big) - \sin\Big(\frac{1}{2}\theta\Big)\Big)\Big]\exp(k\theta)\,,$$

$$m(\theta) = 4(\nu_0 + 2)\,\sin\Big(\frac{1}{2}\theta\Big)\,\cosh(k\theta)\,,$$

$$n(\theta) = 4(\nu_0 + 2)\,\cos\Big(\frac{1}{2}\theta\Big)\,\sinh(k\theta)\,,$$

and $k = \dfrac{\ln(3-4\nu)}{2\pi}$, $\nu_0 = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}$.
When the dimension n is higher than 2, a singular function defined in a half-cylinder is

$${}^t(\mathbf{U}_s, U_s, \dots, U_s)\,,$$

where U_s is the above Shamir function (see [7]).
Under geometrical conditions (2)–(4), we can build a local $\mathcal{C}^2$-diffeomorphism near some point of the interface Γ so that after applying it, every $\mathbf{u}$ satisfying (26) can be written as a linear combination of a regular part (i.e. $\mathbb{H}^2$) and above singular function (see [7]).

4.2. **Extended Rellich relation.** Now, we proceed as in Subsection 3.2. In the regular case we build a Rellich relation by applying two successive Green formulæ.
The general case is studied by using the local structure of an element satisfying (26). In [7] we get the following result.

Theorem 4. *Assume that* $n \geq 3$ *and* Ω *is a bounded open set satisfying* (2)–(3).
If $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ *satisfies* (26), *then* $\Theta(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 2\,(\sigma(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}).(\mathbf{m}.\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{m}.\boldsymbol{\nu}\ \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u})$ *belongs to* $\mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ *and there exists* $\Upsilon \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ *such that*

$$2\int_S^T \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})).(\mathbf{m}.\nabla)\mathbf{u}\, d\mathbf{x}\, dt = (n-2)\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u})\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \Theta(\mathbf{u},\mathbf{u})\, d\sigma + \int_\Gamma \mathbf{m}.\boldsymbol{\tau}\ |\Upsilon|^2\, d\gamma\,.$$

Remark 7. When $\Gamma = \emptyset$, the last term is absent.
When $n = 2$ and Γ is a finite discrete set, this last term is: $\sum_{\mathbf{s}\in\Gamma} \mathbf{m}(\mathbf{s}).\boldsymbol{\tau}(\mathbf{s})\ |\upsilon_{\mathbf{s}}|^2$, where $\upsilon_{\mathbf{s}}$ is the singularity coefficient at point $\mathbf{s} \in \Gamma$.

Then Lemma 3 is a direct consequence of above formula and (11).

5. Extension of previous results

The previous results have been extended in different directions.

(1) For the wave equation,
   - case of nonlinear feedback laws [4],
   - case of coupled wave equations [5].

(2) For the elastodynamic system, the case of a polygonal domain has been studied in [6]. The case of a polyhedral domain is probably possible.

The most recent extension concerns the wave equation: new feedback laws (linear or nonlinear) have been introduced by using a rotated multiplier method in [9]. The case of the elastodynamic system is still in progress.

References

[1] Alabau, F., Komornik, V., *Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems.* // SIAM J. Control Opt. – 1999 – 37, Nr 2, – pp 521-542.

[2] Bey, R., Heminna, A., Lohéac, J.-P., *Boundary stabilization of the linear elastodynamic system by a Lyapunov-type method.* // Revista Matemática Complutense – 2003. – 16, Núm. 2, – pp 417-441.

[3] Bey, R., Lohéac, J.-P., Moussaoui, M., *Singularities of the solution of a mixed problem for a general second order elliptic equation and boundary stabilization of the wave equation.* // J. Math. pures et appli. – 1999. – 78, – pp 1043-1067.

[4] Bey, R., Lohéac, J.-P., Moussaoui, M., *Nonlinear boundary stabilization of the wave equation.* // Partial differential equations, theory and numerical solution. Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math. – 1999. – 406, – pp 45–48.

[5] Bey, R., Lohéac, J.-P., Moussaoui, M., *Boundary stabilization of coupled wave equations.* // Mathematical and numerical aspects of wave propagation. SIAM – 2000. – 78, – pp 1001-1005.

[6] Brossard, R., Lohéac, J.-P., *Stabilisation frontière du système élastodynamique dans un polygone plan.* // C.R. Acad. Sci. Paris, série I Math. – 2004. – 338, – pp 213-218.

[7] Brossard, R., Lohéac, J.-P., *Boundary stabilization of elastodynamic systems. Part I: Rellich-type relations for a problem in elasticity involving singularities.* // preprint hal-00196913 – 2007. – *http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00196913/fr/.*

[8] Brossard, R., Lohéac, J.-P., *Boundary stabilization of elastodynamic systems. Part II: The case of a linear feedback.* // preprint hal-00196924 – 2007. – *http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00196924/fr/.*

[9] Cornilleau, P., Lohéac, J.-P., Osses, A., *Boundary stabilization of the wave equations by means of a rotated multiplier method.* // preprint hal-00178179 – 2007. – *http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00178179/fr/.*

[10] Grisvard, P., Elliptic problems in nonsmooth domains. // Monographs and Studies in Mathematics 24, Pitman, Boston – 1985.

[11] Grisvard, P., *Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités.* // J. Math. pures et appli. – 1989. – 68. – pp 215-259.

[12] Grisvard, P., *Singularités en élasticité.* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – 107, no 2, – pp 157-180.

[13] Guesmia, A., *Observability, controllability and boundary stabilization of some linear elasticity systems.* // Acta Scientiarum Mathematicarum – 1998. – 64, Nr. 1-2, – pp 109-120.

[14] Guesmia, A., 2000, *On the decay estimates for elasticity systems with some localized dissipations.* // Asymptotic Analysis – 2000. – 22, Nr 1, – pp 1-14.

[15] Haraux, A., *Semi-groupes lináires et équations d'évolution lináires périodiques.* // preprint 78011 L.A.N. Univ. P. et M. Curie Paris – 1978.

[16] Ho, L. F., *Observabilité frontière de l'équation des ondes.* // C.R. Acad. Sci. Paris, série I Math. – 1986. – 302, – pp 443-446.

[17] Horn, M. A., *Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity.* // J. of Math. Anal. and Appl. – 1998. – 223, – pp 126-150.

[18] Komornik, V., Exact controllability and stabilization; the multiplier method. // Masson-John Wiley, Paris – 1994.

[19] Komornik, V., *Boundary stabilization of isotropic elasticity systems.* // Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New-York – 1995. – 174, – pp 135-146.

[20] Komornik, V., Zuazua, E., *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation.* // J. Math. pures et appli. – 1990. – 69, – pp 33-54.

[21] Lagnese, J., *Boundary stabilization of linear elastodynamic systems.* // SIAM J. Control Opt. – 1983. – 21, – pp 968-984.

[22] Lagnese, J., 1991, *Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary.* // Nonlinear Anal. TMA – 1991. – 16, – pp 35-54.

[23] Lions, J.-L., Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués (Tome 1). // RMA 8 Masson, Paris – 1988.

[24] Mérouani, B., *Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites.* // Maghreb Math Rev. – 1996. – 5, no 1-2, – pp 95-112.

[25] Moussaoui, M., *Singularités des solutions du problème mêlé, contrôlabilité exacte et stabilisation frontière.* // ESAIM Proceedings, Élasticité, Viscoélasticité et Contrôle optimal, Huitièmes Entretiens du Centre Jacques Cartier – 1996. – pp 157-168.

[26] Rellich, F., *Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u$ durch ein Randintegral.* // Math. Zeitschrift – 1940. – 46, – pp 635-636.

[27] Shamir, E., *Regularity of mixed second order elliptic problems.* // Israel Math. Journal – 1968. – 6, – pp 150-168.

Laboratoire J.-V. Poncelet (C.N.R.S. U.M.I. 2615)
Independent Moscow University
Bol. Vlasyevsky Per. 11, 119002, Moscow, Russia
E-mail: Jean-Pierre.Loheac@math.cnrs.fr

СОДЕРЖАНИЕ